ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2014

МЕХАНІКА

УДК 539.421

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов

Злиття двох колінеарних тріщин різної довжини у в'язкопружній композитній пластині

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

За допомогою лінійної теорії в'язкопружності побудовано визначальні рівняння для залежних від часу положень кінців різних за довжиною колінеарних тріщин нормального відриву в ортотропній композитній пластині за умов плоского напруженого стану. Визначальні рівняння являють собою систему інтегральних рівнянь та нерівностей. Числові приклади кінетичних кривих наведено для двох початкових відстаней між тріщинами. Для розглянутої задачі швидкості поширення кінців тріщини різняться.

Вивченню поширення ізольованої тріщини внаслідок повзучості матеріалу присвячена значна кількість публікацій [1]. На практиці не менш важливим є ще один тип довготривалого руйнування, коли в процесі повільного підростання тріщин докритичної довжини відбувається їх об'єднання в єдину магістральну тріщину, яка може мати критичну довжину або продовжити докритичне поширення та злиття з іншими дрібними тріщинами. Цей тип руйнування можна віднести до багатоосередкового руйнування, проблеми якого широко обговорювалися на міжнародній конференції ICF-8 у зв'язку з руйнуванням виготовлених з полімерних композитних матеріалів елементів конструкцій літаків.

В одній з перших публікацій щодо цієї проблеми [2] досліджено злиття двох колінеарних напівнескінченних тріщин в ізотропній в'язкопружній пластині. Як висновок зазначено, що руйнування перемички може відбуватися за одним з двох механізмів: критичне злиття (розкриття у вершині тріщини (COD) близьке до свого критичного значення) та докритичне злиття, під час якого істотно зростає швидкість поширення тріщин. Кінетика злиття тріщин описана в роботі одним інтегральним рівнянням для знаходження напіввідстані між тріщинами як функції часу.

У роботі [3] постановку було ускладнено скінченністю тріщин, що зливаються; вивчалося злиття та поширення в зовнішні боки двох колінеарних тріщин однакової довжини в ізотропній пластині. Отримано такі результати: для високих рівнів зовнішнього наванта-

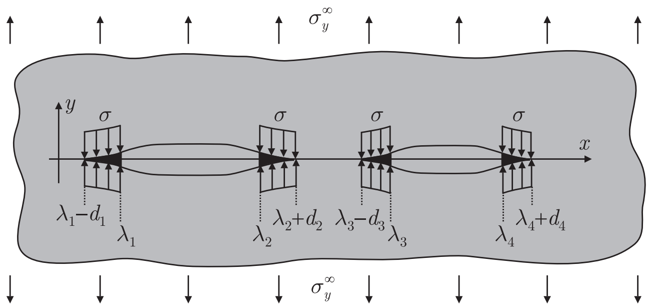

Рис. 1

ження і при малих початкових відстанях між сусідніми вершинами тріщини зливаються до початку зростання у зовнішні боки; при збільшенні початкової відстані момент часу початку поширення у зовнішні боки наближається до тривалості інкубаційного періоду, а момент часу злиття тріщин — до тривалості усього докритичного зростання (при достатньому початковому віддаленні кожна з тріщин зростатиме в обидва боки, причому момент злиття буде відповідати закінченню докритичного поширення). Положення кінців тріщин як функцій часу описано в роботі системою інтегрального рівняння та нерівності (при поширенні тільки внутрішніх кінців) та двох інтегральних рівнянь (при поширенні кожної з тріщин в обидва боки).

У даній роботі досліджується докритичне злиття та поширення системи двох колінеарних тріщин різної довжини в ортотропній в'язкопружній пластині, виготовленій з композитного матеріалу.

Кінетика злиття та поширення тріщин описана в роботі системою чотирьох інтегральних рівнянь і нерівностей для знаходження положення кінців тріщин як функцій часу; визначальні співвідношення розв'язані чисельним методом. Розраховано кінетичні криві зростання двох колінеарних тріщин у в'язкопружній пластині під дією зовнішнього навантаження, прикладеного на значній відстані від тріщин у напрямку нормалі до лінії їх розташування.

Рівняння поширення двох колінеарних тріщин. Знайдемо розв'язок задачі про переміщення берегів системи двох тріщин різної довжини у нескінченній лінійно пружній ортотропній пластині в рамках моделі, що включає зони передруйнування на продовженні тріщини. Рівень зовнішнього навантаження розглядатимемо таким, що дозволяє використовувати концепцію тонкої структури [4].

Узагальнений закон Гука для головних напрямків x і y ортотропної пластини подамо у вигляді

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y; \qquad \varepsilon_y = -a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y; \qquad \gamma_{xy} = a_{66}\tau_{xy}, \tag{1}$$

де a_{ij} — модулі податливості матеріалу пластини ($a_{11} = 1/E_{11}$, $a_{22} = 1/E_{22}$, $a_{12} = -\nu_{21}/E_{11}$, $a_{16} = 1/G_{12}$).

Нехай у пластині вздовж прямої, що збігається з одним із головних напрямків, розташована система двох тріщин різної довжини (рис. 1). До тіла прикладено рівномірно розподілене на нескінченності розтягуюче зусилля σ_y^∞, напрямок якого збігається з напрямком нормалі до лінії розташування тріщин. Введемо ортогональну декартову систему координат, вісь Ox якої направимо вздовж лінії тріщин.

Відповідно до моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла області нелінійної поведінки матеріалу в околі вершин тріщин замінимо розрізами, до берегів яких прикладені стискаючі напруження інтенсивністю σ. Таким чином, приходимо до задачі теорії пружності про розтяг пружної пластинки з розрізами вздовж осі Ox при таких контурних умовах:

$$\tau_{xy}(x) = 0, \qquad x \in L; \qquad \sigma_y(x) = \begin{cases} 0, & x \in L', \\ \sigma, & x \in L'', \end{cases}$$

де

$$L = L' \bigcup L'', \qquad L' = \bigcup_n (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), \qquad L'' = \bigcup_{k=1}^{4} L''_k,$$

$$L''_k = \begin{cases} [\lambda_k - d_k, \lambda_k], & k = 2n-1, \\ [\lambda_k, \lambda_k + d_k], & k = 2n, \end{cases} \qquad n = 1, 2.$$

Кінці розрізів $\lambda_{2n-1} - d_{2n-1}$ і $\lambda_{2n} + d_{2n}$ необхідно визначати так, щоб у відповідних точках виконувалася умова скінченності напружень.

Запишемо розв'язок цієї задачі:

$$v(x) = \Lambda \frac{\sigma d_k}{\pi} F\left[\frac{|x - \lambda_k|}{d_k}\right], \qquad x \in L''_k, \qquad d_k = \frac{\pi K_{\mathrm{I}}^2(\lambda_k)}{8\sigma_2}, \tag{2}$$

$$\Lambda = 2\sqrt{a_{22}\left[2\left(\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12}\right) + a_{66}\right]}, \tag{3}$$

$$F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-s}}{1 + \sqrt{1-s}},$$

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda_k) = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_y^{\infty} \widetilde{P}(\lambda_k)}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad \widetilde{P}(x) = x^2 + \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2, \qquad R(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{4} |\lambda_k - \lambda_i|,$$

$$\widetilde{C}_1 = -\alpha_{-3}, \qquad \widetilde{C}_2 = \frac{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t(\tau)[\alpha_{-3} - t(\tau)]\mathrm{d}\tau}{X_2(\tau)}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{X_2(\tau)}}, \qquad \alpha_{-3} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \lambda_i, \qquad t(\tau) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \tau^2}{1 + \tau^2},$$

$$X_2(\tau) = \sqrt{(\tau^2 + \xi_3)(\tau^2 + \xi_4)}, \qquad \xi_k = \frac{\lambda_k - \lambda_1}{\lambda_k - \lambda_2}, \qquad k = 3, 4.$$

В'язкопружне зміщення вздовж зон передруйнування визначатимемо на основі розв'язку задачі про пружне розкриття за допомогою принципу пружно-в'язкопружної аналогії, що є аналогом принципу Вольтерра, який одержав обгрунтування для аналогічних задач у роботі [1]. Згідно з цим принципом, у виразі для зміщень берегів на продовженні тріщини змінимо пружні модулі відповідними перетвореними величинами і скористаємося оберненим перетворенням.

Якщо релаксаційні властивості матеріалів компонентів композита можна описати в рамках лінійної теорії в'якопружності, ефективні модулі подамо рядом функцій Міттаг–Лефлера [5]:

$$e_{n,ij}(t) = e^{\infty}_{n,ij} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n,ij,k} \mathrm{E}_{\alpha_{n,ij};1}(-\beta_{n,ij,k} t^{\alpha_{n,ij}}), \qquad \mathrm{E}_{\alpha;\delta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma[\alpha k + \delta]} \tag{4}$$

($n = 1$ відповідає матеріалу армування, $n = 2$ — наповнювача, e^{∞} — довготривале значення модуля). При проведенні обчислень ми залишимо лише один доданок у виразі (4) і використовуватимемо один параметр α функції Міттаг–Леффлера для описання довготривалих властивостей матеріалів компонентів композита з метою якісного дослідження результатів. Вважатимемо також, що матеріали компонентів композита є ізотропними (механічні властивості описуємо модулем Юнга E і коефіцієнтом Пуассона ν, який не залежить від часу). Відзначимо, що жодне з цих спрощень не обумовлене використаним методом розв'язання поставленої задачі.

При вказаних спрощеннях вираз (4) в області перетворення набуде вигляду

$$\widetilde{E}_n(s) = E^{\infty}_n + (E^0_n - E^{\infty}_n)\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} + \beta_n},$$

де $\widetilde{E}(s) = s\overline{E}(s)$; $\overline{E}(s)$ — перетворення Лапласа функції $E(t)$; E^0 — миттєве значення модуля.

Виходячи з виразів для перетворень в'язкопружних аналогів модулів Юнга матеріалів компонент композита, використовуючи методи механіки композитних матеріалів [6], знайдемо перетворення в'язкопружних аналогів модулів податливості пластини a_{ij} (див. (1)). Підставимо отримане у вираз (3) і знайдемо обернене перетворення. Матимемо

$$\Lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\widetilde{\Lambda}/s\}, \qquad \Lambda'(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\widetilde{\Lambda} - \widetilde{\Lambda}^{\infty}\} \tag{5}$$

(більш детально про отримання величини $\Lambda(t)$ див. [7]).

Переходимо до визначення закону зміни вертикального переміщення як функції часу. У випадку залежності від часу характеристики Λ і координат кінців тріщини $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ змінюємо величину $v(x)$ у виразі (2) інтегралом Больцмана, а величину σ^{∞}_y — функцією $\sigma^{\infty}_y(t) = \sigma^{\infty}_y h(t)$ ($h(t)$ — одинична функція Хевісайда). Запишемо

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t \Lambda(t-\tau)\,\mathrm{d}v[x;\lambda(\tau)], \\ v(x;\lambda) &= \frac{\pi[\sigma^{\infty}_y \widetilde{P}(\lambda_k)]^2}{4\sigma R(\lambda)}, \qquad x \in L''_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Рівняння для визначення положення кінців тріщин при зростанні на основі критерію критичного розкриття тріщини можна записати у вигляді системи інтегральних рівнянь та нерівностей [3]

$$\begin{cases} v(\lambda_i(t), t) = v^*, \\ v(\lambda_j(t), t) < v^* \end{cases} \tag{7}$$

(індекси i відповідають вершинам, де досягнуто критичне значення вертикального переміщення v^*, а індекси j — вершинам, де критичного значення не досягнуто).

Тривалість інкубаційного періоду розвитку колінеарних тріщин t_0 визначимо з рівняння

$$v(\lambda_{i1}(0), t_0) = v^*, \qquad \max_k \{v[\lambda_k(0); \lambda(0)]\} = v[\lambda_{i1}(0); \lambda(0)]$$

(індекс $i1$ відповідає вершині, в якій вертикальне переміщення найбільше для початкового положення $\lambda(t)$).

Далі буде запропоновано схему чисельного розв'язання системи (7), коли тріщини починають зростати.

Шукатимемо розв'язок системи (7) $\lambda(t)$ в моменти часу $t_0(1+k\Delta)$, $k = 1, 2, \ldots$. Рівняння в системі (7), що відповідає $i1$-й вершини в момент часу $t = t_1$, набуде вигляду

$$v[\lambda_{i1}(t_1); \lambda(t_1)] + \int_0^{t_1} \Lambda'(t_1 - \tau) v[\lambda_{i1}(t_1); \lambda(\tau)] \mathrm{d}\tau = v^*.$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння $\lambda_{i1}(t_1)$, покладаючи, що $\lambda_{i1}(t)$ змінюється лінійно при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Продовжимо знаходити $\lambda_{i1}(t_k)$, доки критичного переміщення не буде досягнуто в іншій вершині, порядковий номер якої $i2 \neq i1$: для $k = k1$ отримаємо $v(\lambda_{i2}(t_k), t_k) > v^*$.

Рівняння в системі (7), що відповідає $i1$-й і $i2$-й вершинам в момент часу $t = t_{k2}$, набуде вигляду

$$\begin{cases} v[\lambda_{i1}(t_{k1}); \lambda(t_{k1})] + \displaystyle\int_0^{t_{k1}} \Lambda'(t_{k1} - \tau) v[\lambda_{i1}(t_{k1}); \lambda(\tau)] \mathrm{d}\tau = v^*, \\ v[\lambda_{i2}(t_{k1}); \lambda(t_{k1})] + \displaystyle\int_0^{t_{k1}} \Lambda'(t_{k1} - \tau) v[\lambda_{i2}(t_{k1}); \lambda(\tau)] \mathrm{d}\tau = v^*. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи $(\lambda_{i1}(t_{k1}), \lambda_{i2}(t_{k1}))$, покладаючи, що $\lambda_{i1}(t)$ і $\lambda_{i2}(t)$ змінюється лінійно при $t_{k1-1} \leqslant t \leqslant t_{k1}$. Продовжимо знаходити $(\lambda_{i1}(t_k), \lambda_{i2}(t_k))$, доки критичного переміщення не буде досягнуто в іншій вершині, порядковий номер якої $i3$ ($i3 \neq i1$, $i3 \neq i2$): для $k = k2$ отримаємо $v(\lambda_{i3}(t_k), t_k) > v^*$. Подібним чином продовжуватимемо визначати $\lambda(t)$. При значному віддаленні тріщин рухатися почнуть всі їх кінці. У випадку, коли на якомусь кроці система (7) не має розв'язку, покладаємо, що відповідний момент часу є початком етапу динамічного поширення тріщин. Внеском цього етапу в загальну довговічність тіла з тріщинами будемо нехтувати.

Числові приклади. Розв'язки системи (7) отримаємо при таких параметрах задачі.

Реологічні параметри композита:

1) наповнювача — $E_2^0 = 4000$ МПа, $E_2^\infty = 400$ МПа, $\alpha = 0{,}5$, $\beta_2 = 0{,}1$ с $^{-\alpha}$;

2) волокон — $E_1^0 = 79810$ МПа, $E_1^\infty = 7981$ МПа, $\beta_1 = 0{,}01$ с $^{-\alpha}$; об'ємна концентрація волокон $c_1 = 0{,}2$.

Параметри тріщиностійкості та зовнішнього навантаження: $\sigma = 35$ МПа, $v^* = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, $\sigma/\sigma_y^\infty = 4$.

На рис. 2 зображено кінетичні криві зростання двох колінеарних тріщин довжиною 2 і 2,5 см. Рис. 2, *а* відповідає випадку, коли початкова відстань між тріщинами $\lambda_3(0) - \lambda_2(0) = 1$ см, рис. 2, *б* — випадку, коли $\lambda_3(0) - \lambda_2(0) = 0{,}7$ см. Зрозуміло, що в обох випадках першим починає рухатися кінець більшої тріщини, який є ближчим до меншої

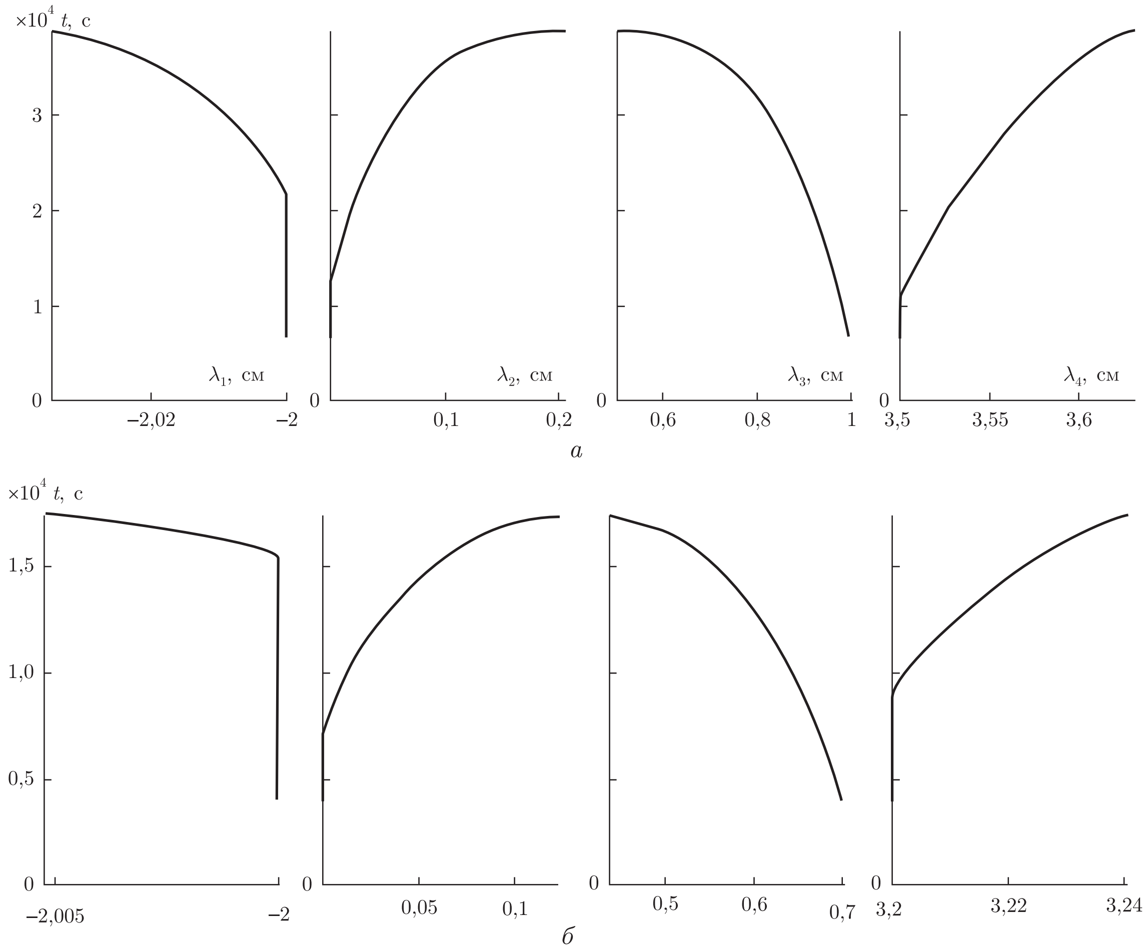

Рис. 2

тріщини ($i1 = 3$). У прикладі *а* другим починає рухатися зовнішній кінець більшої тріщини ($i2 = 4$), у прикладі *б* — внутрішній кінець меншої тріщини ($i2 = 2$).

Таким чином, в роботі запропоновано та проілюстровано ефективний метод дослідження поширення колінеарних тріщин у в'язкопружній пластині. Метод можна перенести на дослідження зростання та злиття систем колінеарних тріщин, кількість яких перевищує дві.

1. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 310 с.
2. *Gutzul V. I., Kaminsky A. A.* Kinetics of fracture of a viscoelastic plate with two cracks // Int. Appl. Mech. – 1989. – **25**, No 5. – P. 477–483.
3. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chornoivan Yu. O.* Model of growth and coalescence of two collinear cracks in a viscoelastic body // J. of Math. Sciences. – 2013. – **190**, No 5. – P. 697–709.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
5. *Selivanov M. F.* On the effective properties of linear viscoelastic composite // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No 10. – P. 62–70.
6. *Ван Фо Фы Г. А.* Композиционные материалы волокнистого строения. – Киев: Наук. думка, 1970. – 404 с.
7. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chornoivan Yu. O.* On subcritical development of a shear crack in a composite with viscoelastic components // J. of Math. Sci. – 2011. – **176**, No 5. – P. 616–630.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 21.11.2013

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов

Слияние двух коллинеарных трещин разной длины в вязкоупругой композитной пластине

При помощи линейной теории вязкоупругости получены определяющие уравнения для зависимых от времени координат вершин отличающихся по длине коллинеарных трещин нормального отрыва в ортотропной композитной пластине при плоском напряженном состоянии. Определяющие уравнения представляют собой систему интегральных уравнений и неравенств. Численные примеры кинетических кривых представлены для двух начальных расстояний между трещинами. Для рассмотренной задачи скорости распространения концов трещины различны.

A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov

Coalescence of two unequal collinear cracks in a viscoelastic composite plate

Using the theory of linear viscoelasticity, the constitutive relations for the time-dependent tips of the mode I nonequal collinear cracks in orthotropic composite materials under conditions of a in-plane stress state are obtained. The constitutive relations are a system of integral equations and inequalities. The numerical examples of kinetic curves are presented for two initial distances between cracks. The propagation rates of crack tips are different for the problem under study.