УДК 519.8

Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко

Возмущенные упорядочивающие конусы для анализа задач векторной оптимизации в условиях неопределенности

(Представлено академиком НАН Украины $\boxed{\text{В. С. Дейнекой}}$)

Проведен анализ свойств возмущенных конусов, частично упорядочивающих множество допустимых решений задачи векторной оптимизации относительно линейных целевых функций. Изучена структура всей совокупности специальным образом возмущенных упорядочивающих конусов, соответствующих различным значениям параметра возмущений входных данных задачи.

Работа посвящена исследованию влияния неопределенности в исходных данных на решение задачи оптимизации со многими линейными критериями. Существуют разные источники неопределенности и среди них — изменение данных во времени, неточные входные данные, субъективные данные, неполные данные, ошибки измерения. В задачах оптимизации малые ошибки во входных данных могут привести к решениям, которые сильно отличаются от истинных. Особенно это касается задач, в которых присутствуют переменные, принимающие дискретные значения, и которые обычно не обладают свойствами дифференцируемости. Такие задачи даже при незначительных изменениях в исходных данных часто ведут себя непредсказуемо. В связи с этим актуальной является разработка инструментария для определения влияния возмущений в исходных данных на получаемое решение.

Проведенные нами исследования направлены на расширение возможностей использования конусов, которые упорядочивают множества допустимых решений задач векторной оптимизации относительно функций, составляющих векторный критерий, для анализа влияния возмущений в исходных данных на решения таких задач.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации

$$Z(M(C,X))\colon\ \max\{Cx \mid x \in X\}, \tag{1}$$

которая состоит в поиске элементов некоторого множества оптимальных решений $M(C,X) \in \mathfrak{M}(C,X) = \{\mathrm{Sl}(C,X), P(C,X), \mathrm{Sm}(C,X)\}$, где $\mathrm{P}(C,X)$ — множество Парето-оптимальных (эффективных) решений задачи; $\mathrm{Sl}(C,X)$ — множество оптимальных по Слейтеру (слабо эффективных) решений; $\mathrm{Sm}(C,X)$ — множество оптимальных по Смейлу (строго эффективных) решений [1, 2]; $M(C,X) = \{x \in X \mid \omega(x, M(C,X)) = \varnothing\}$, $\omega(x,\mathrm{P}(C,X)) = \{z \in X \mid Cz \geqslant Cx, Cz \neq Cx\}$, $\omega(x,\mathrm{Sl}(C,X)) = \{z \in X \mid Cz > Cx\}$, $\omega(x,\mathrm{Sm}(C,X)) = \{z \in X \mid z \neq x, Cz \geqslant Cx\}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ — матрица, строки $c_i = (c_{i1},\ldots,c_{in})$, $i \in \{1,\ldots,\ell\}$ которой представляют собой наборы коэффициентов линейных целевых функций $\langle c_i, x\rangle$, составляющих векторный критерий задачи (1); $X \subset \mathbb{R}^n$ — допустимое множество произвольной структуры.

Основное различие между скалярной и векторной оптимизацией состоит в упорядочивании множества допустимых решений задачи. В оптимизации с одной целевой функцией возможно полное упорядочение допустимой области задачи относительно целевой функции. В векторной оптимизации с двумя или более целевыми функциями допустимое множество может быть лишь частично упорядочено. Частичный порядок допустимой области относительно целей оптимизации можно описать с использованием понятия конуса. Согласно [3], подмножество K из $\mathbb{R}^n$ является конусом, если $\lambda x \in K$ для всех $x \in K$ и $\lambda > 0$. С математической точки зрения, вектор $x \in \mathbb{R}^n$ лучше, чем вектор $y \in \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $x - y \in K$, где K — так называемый упорядочивающий конус. Для упорядочивания допустимой области задачи (1) рассмотрим многогранный конус

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \geqslant 0\},$$

который может быть представлен как объединение множеств

$$K = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2,$$

где $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = 0\}$, $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx > 0\}$, $K_2 = K \setminus (K_0 \bigcup K_1)$. Тогда $\forall\, x \in X$: $x \in \mathrm{P}(C,X) \Leftrightarrow (x + K_1 \bigcup K_2) \bigcap X = \varnothing$, $x \in \mathrm{Sl}(C,X) \Leftrightarrow (x + K_1) \bigcap X = \varnothing$, $x \in \mathrm{Sm}(C,X) \Leftrightarrow (x + K) \bigcap X \setminus \{x\} = \varnothing$.

Очевидно, что для любых двух точек $x \in X$ и $x' = x + s$, где $s \in K$, выполняется неравенство $Cx' \geqslant Cx$. Поэтому любой элемент $s \in K$ назовем перспективным направлением в пространстве решений задачи (1). Если $s \in K_0$, то $Cx' = Cx$, и в этом случае s можно назвать направлением равновесия.

Определим двойственный конус K^* к многогранному конусу K с помощью формулы [4]

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k c_k,\ \lambda_k \geqslant 0,\ k = 1, \ldots, \ell\}.$$

Рассмотрим семейство специальным образом возмущенных задач $\{Z(M(C^\tau, X)) \mid \tau \in \in \mathbb{R}^1\}$, где $M(C^\tau, X) \in \mathfrak{M}(C^\tau, X)$, которые базируются на задаче (1) и в которых каждая строка c_i^τ, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, возмущенной матрицы C^τ имеет вид

$$c_i^\tau = c_i - \tau u, \tag{2}$$

где $\tau \in \mathbb{R}^1$ — параметр возмущений; $u \in riK^*$ — вектор возмущений, $u \neq 0$,

$$u = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i c_i, \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 1, \qquad \mu_i > 0, \qquad i = 1, \ldots, \ell. \tag{3}$$

Возмущенной задаче $Z(M(C^\tau, X))$, где $M(C^\tau, X) \in \mathfrak{M}(C^\tau, X)$, $\tau \in \mathbb{R}^1$, поставим в соответствие возмущенный упорядочивающий конус $K^\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C^\tau x \geqslant 0\}$, который может быть представлен как объединение множеств

$$K^\tau = K_0^\tau \bigcup K_1^\tau \bigcup K_2^\tau,$$

где $K_0^\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C^\tau x = 0\}$, $K_1^\tau = \{x \in \mathbb{R}^n \mid C^\tau x > 0\}$, $K_2^\tau = K^\tau \setminus (K_0^\tau \bigcup K_1^\tau)$. Очевидно, что $K^0 = K$, $K_0^0 = K_0$, $K_1^0 = K_1$, $K_2^0 = K_2$.

В данной работе продолжены описанные в [5–10] исследования свойств упорядочивающих конусов, возмущенных в соответствии с формулами (2) и (3). Некоторые из этих свойств позволили разработать такой подход [6, 8] к регуляризации возможно неустойчивой задачи вида (1) с целочисленными переменными, который изменяет частичный порядок в пространстве решений таким образом, что оптимальные по Слейтеру решения возмущенной задачи (с немного расширенным упорядочивающим конусом, содержащим в себе исходный конус), становятся Парето-оптимальными решениями исходной задачи даже при возможных достаточно малых ошибках в исходных данных, используемых для описания векторного критерия.

Сформулируем ряд теорем, которые характеризуют закономерности изменения свойств возмущенных конусов перспективных направлений задачи (1) и их подмножеств при изменении значений параметра возмущений τ и могут использоваться при разработке теории корректности оптимизационных многокритериальных задач, в том числе задач полностью и частично целочисленной оптимизации.

Прежде всего отметим, что значение параметра возмущений $\tau = 1$ можно рассматривать как некий порог, при котором вектор возмущений $u \in K^*$, определенный по формуле (3), существенно изменяет свойства возмущенных упорядочивающих конусов, меняя в связи с этим также особенности соответствующих возмущенных задач.

Теорема 1 [10]. *Если* $\tau < 1$, *то* $K^\tau \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\}$. *Если* $\tau > 1$, *то* $K^\tau \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \leqslant 0\}$.

На основании этого утверждения доказана следующая теорема, описывающая в главных чертах свойство монотонности, присущее рассматриваемым здесь специальным возмущениям упорядочивающих конусов и состоящее в постепенном изменении "размеров" возмущенных конусов.

Теорема 2 [10]. $\forall\, \tau', \tau''(1 < \tau' < \tau'')\colon K^{\tau'} \subset K^{\tau''}$; $\forall\, \tau', \tau''(\tau' < \tau'' < 1)\colon K^{\tau''} \subset K^{\tau'}$.

При доказательстве описанных ниже результатов исследования множеств $\{K^\tau \mid \tau \in \mathbb{R}^1\}$, $\{K_0^\tau \mid \tau \in \mathbb{R}^1\}$, $\{K_1^\tau \mid \tau \in \mathbb{R}^1\}$, $\{K_2^\tau \mid \tau \in \mathbb{R}^1\}$ использовалась лемма о том, что множество всех направлений равновесия исходной задачи $Z(M(C, X))$ лежит на гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$, отделяющей друг от друга две совокупности возмущенных конусов: $\{K^\tau \mid \tau < 1\}$ и $\{K^\tau \mid \tau > 1\}$.

Лемма. $K \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} = K_0$.

Доказательство. По определению многогранного конуса K для любого направления $y \in K \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$ справедливы соотношения $c_k y \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, \ell$, и $uy = \sum\limits_{k=1}^{\ell} \mu_k c_k y = 0$, откуда с учетом неравенств $\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots, \ell$, приходим к выводу, что $Cy = 0$ и, следовательно, $y \in K_0$. С другой стороны, выбрав произвольно точку $x \in K_0$, приходим к равенствам $ux = \sum\limits_{k=1}^{\ell} \mu_k c_k x = 0$.

Теорема 3. $\forall\, \tau \in \mathbb{R}^1\colon K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} \subset K_0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y \in K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$, где $\tau \in \mathbb{R}^1$. Очевидно, для точки y при любом $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ справедливы соотношения $0 \leqslant c_k^\tau y = (c_k - \tau u)y = c_k y$, откуда следует принадлежность $y \in K$. Принимая во внимание лемму, уточняем, что $y \in K_0$.

Теорема 4 [8]. $\forall\, \tau \in \mathbb{R}^1\colon K_0 \subset K_0^\tau$.

Доказательство. С учетом леммы для любой точки $x \in K_0$ при произвольном значении $\tau \in \mathbb{R}^1$ справедливы соотношения $c_i^\tau x = c_i^x - \tau ux = 0$ $(i = 1, \ldots, \ell)$, откуда следует, что $x \in K_0^\tau$.

Из теорем 3 и 4 вытекает следствие.

Следствие 1. $\forall \tau \in \mathbb{R}^1 \colon K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} \subset K_0^\tau$.

Для случая, когда значение параметра возмущений τ отличается от единицы, результаты, доказанные в теоремах 3 и 4, можно уточнить следующим образом.

Теорема 5 [9, 10]. $\forall \tau \in \mathbb{R}^1 \setminus \{1\} \colon K_0 = K_0^\tau = K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$.

Таким образом, множество направлений равновесия исходной задачи не изменяется при возмущении ее исходных данных, если значения параметра возмущений отличны от единицы. Данный вывод приводит нас также к следующему утверждению, которое становится очевидным с учетом теоремы 1 и указывает на то, что за исключением направлений равновесия все остальные перспективные направления задачи $Z(M(C^\tau, X))$, где $\tau \neq 1$, лежат в одном из открытых полупространств: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ux > 0\}$ при $\tau < 1$ и $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ux < 0\}$ при $\tau > 1$.

Теорема 6. *$\forall \tau < 1 \colon K_1^\tau \bigcup K_2^\tau = K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux > 0\}$; $\forall \tau > 1 \colon K_1^\tau \bigcup K_2^\tau = K^\tau \bigcap \{x \in \in \mathbb{R}^n \mid ux < 0\}$.*

Опираясь на эту теорему, конкретизируем данное в теореме 2 описание свойства монотонности, присущее возмущенным конусам перспективных направлений при изменениях значений параметра возмущений τ.

Теорема 7. *$\forall \tau', \tau''(1 < \tau' < \tau'') \colon K_1^{\tau'} \bigcup K_2^{\tau'} \subset K_1^{\tau''}$.*

Доказательство. Выберем значения τ' и τ'' параметра возмущений τ, которые связаны строгими неравенствами $1 < \tau' < \tau''$. Очевидно, для любого направления $x \in K_1^{\tau'} \bigcup K_2^{\tau'}$ выполняются условия $c_k^{\tau'} x \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, \ell$, а в соответствии с теоремой 6 — и неравенство $ux < 0$. Учитывая эти неравенства и воспользовавшись формулами

$$c_k^{\tau''} x = (c_k - \tau'' u)x = c_k x - \tau'' ux + \tau' ux - \tau' ux = c_k x - \tau' ux + (\tau' - \tau'')ux =$$
$$= c_k^{\tau'} x + (\tau' - \tau'')ux, \qquad k = 1, \ldots, \ell,$$

для оценки величины $c_k^{\tau''} x$, приходим к выводу о справедливости строгого неравенства $c_k^{\tau''} x > 0$ для любого $k = 1, \ldots, \ell$, что и означает принадлежность $x \in K_1^{\tau''}$.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *$\forall \tau', \tau''(\tau' < \tau'' < 1) \colon K_1^{\tau''} \bigcup K_2^{\tau''} \subset K_1^{\tau'}$.*

Рассмотрим теперь возмущенный упорядочивающий конус задачи (1) в случае, когда значение параметра возмущений $\tau = 1$.

Равенство $K_0 = K_0^\tau$, о котором идет речь в теореме 5, не обязательно выполняется при $\tau = 1$, так как возможно, что $K_0^1 \setminus K_0 \neq \varnothing$ и не все точки множества K_0^1 принадлежат гиперплоскости $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$; $K_0^1 \setminus K_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux > 0\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux < 0\}$.

В рассматриваемом случае имеет место также следующее утверждение.

Теорема 9 [9]. *$K_0^1 = K^1$.*

Кроме того, для значения $\tau = 1$ можно усилить результат, который был представлен в теореме 3 для произвольного значения τ из $\mathbb{R}^1$.

Теорема 10. *$K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} = K_0$.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует включение $K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} \subset K_0$. Выбрав произвольную точку $y \in K_0$, во-первых, приходим, согласно лемме, к выводу, что $y \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$. Во-вторых, согласно теоремам 4 и 9, верно $y \in K_0^1 = K^1$. Следовательно, $K_0 \subset K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\}$. Доказательство завершено.

Суммируя результаты, представленные в теоремах 5 и 10, приходим к следующему утверждению.

Теорема 11. $\forall\, \tau \in \mathbb{R}^1$: $K^\tau \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux = 0\} = K_0$.

В дополнение к теоремам 7 и 8, характеризующим взаимосвязи между подмножествами возмущенных конусов перспективных направлений при значениях параметра возмущений, отличных от единицы, предлагаем еще две теоремы, в которых при изучении указанных взаимосвязей в рассмотрение вводится также значение параметра возмущений, равное единице.

Теорема 12. $\forall\, \tau(-\infty < \tau < 1)$: $K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux > 0\} \subset K_1^\tau$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $y \in K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux > 0\}$. В связи с тем, что, согласно теореме 9, $K_0^1 = K^1$, для любого $k = 1, \ldots, \ell$ справедливы соотношения $0 = c_k^1 y = (c_k - u)y$ и, следовательно, $c_k y = uy > 0$. Выберем значение параметра возмущений τ в интервале $(-\infty, 1)$ и оценим $\forall\, k \in \{1, \ldots, \ell\}$ величину $c_k^\tau y$: $c_k^\tau y = (c_k - \tau u)y = c_k y - \tau uy = uy - \tau uy = (1 - \tau)uy > 0$. Таким образом, $\forall\, \tau \in (-\infty, 1)$: $y \in K_1^\tau$.

Аналогичным образом можно доказать и следующую теорему.

Теорема 13. $\forall\, \tau(1 < \tau < +\infty)$: $K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux < 0\} \subset K_1^\tau$.

Анализируя приведенные выше результаты, описывающие структуру всей совокупности возмущенных конусов перспективных направлений задачи (1) при значениях параметра возмущений $\tau \in \mathbb{R}^1$, приходим к следующим выводам, дополняющим это описание.

Из теорем 1 и 5 вытекает утверждение.

Утверждение 1. $\forall\, \tau', \tau''(\tau' < 1 < \tau'')$: $K^{\tau'} \bigcap K^{\tau''} = K_0$.

Из теорем 5 и 7 следует утверждение.

Утверждение 2. $\forall\, \tau', \tau''(1 < \tau' < \tau'')$: $K^{\tau'} \bigcap K^{\tau''} \subset K_0 \bigcup K_1^{\tau''}$.

Из теорем 5 и 8 следует утверждение.

Утверждение 3. $\forall\, \tau', \tau''(\tau' < \tau'' < 1)$: $K^{\tau'} \bigcap K^{\tau''} \subset K_0 \bigcup K_1^{\tau'}$.

Утверждение 4. $\bigcap\limits_{-\infty < \tau \leqslant 1} K^\tau = K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\}$.

Доказательство. С одной стороны, в соответствии с теоремой 1 имеем $\bigcap\limits_{-\infty < \tau < 1} K^\tau \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\}$, откуда следует, что $\bigcap\limits_{-\infty < \tau \leqslant 1} K^\tau \subset K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\}$. С другой стороны, с учетом теорем 10 и 12, имеют место включения $K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\} \subset K_0 \bigcup K_1^\tau \subset K^\tau$ для всех значений параметра τ из интервала $(-\infty, 1)$. Следовательно, $K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \geqslant 0\} \subset \bigcap\limits_{-\infty < \tau \leqslant 1} K^\tau$, что и завершает доказательство.

Аналогичным образом, учитывая теоремы 1, 10 и 13, можно доказать такое утверждение.

Утверждение 5. $\bigcap\limits_{1 \leqslant \tau < +\infty} K^\tau = K^1 \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ux \leqslant 0\}$.

Анализируя утверждения 4 и 5 и принимая во внимание теорему 10, легко приходим к такому выводу.

Утверждение 6 [10]. $\bigcap\limits_{\tau \in \mathbb{R}^1} K^\tau = K_0$.

Таким образом, в результате проведенных исследований нам удалось существенно расширить представление о свойствах специальным образом возмущенных (в соответствии с формулами (2) и (3)) конусов, которые упорядочивают множества допустимых решений векторных оптимизационных задач вида (1) с линейными частными критериями, при всевозможных значениях числового параметра возмущений $\tau \in \mathbb{R}^1$.

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.

2. *Smale S.* Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econ. – 1974. – No 1. – P. 213–221.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – Москва: Мир, 1973. – 470 с.
4. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. – Москва: Наука, 1975. – 320 с.
5. *Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости // Кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 58–61.
6. *Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.* О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1993. – № 3. – С. 172–176.
7. *Козерацкая Л. Н.* Задачи векторной оптимизации: устойчивость в пространстве решений и в пространстве альтернатив // Там же. – 1994. – № 6. – С. 122–133.
8. *Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.* Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. – Киев: Наук. думка, 1995. – 170 с.
9. *Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Кононова А. А.* Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации // Кибернетика и систем. анализ. – 1997. – № 1. – С. 3–10.
10. *Kozeratska L., Forbes J. F., Goebel R. J., Kresta J. V.* Pertubred cones for analysis of uncertain multicriteria optimization problems // Linear algebra and its applications. – 2004. – **378**. – P. 203–229.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 12.12.2013

Т. Т. Лебєдєва, Н. В. Семенова, Т. І. Сергієнко

Збурені впорядковуючі конуси для аналізу задач векторної оптимізації за умов невизначеності

Проведено аналіз властивостей збурених конусів, що частково впорядковують множину допустимих розв'язків задачі векторної оптимізації відносно лінійних цільових функцій. Вивчено структуру всієї сукупності спеціальним чином збурених упорядковуючих конусів, відповідних різним значенням параметра збурень вхідних даних задачі.

T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko

Perturbed ordering cones for the analysis of vector optimization problems under uncertainty

The analysis of the properties of perturbed cones that partially order the set of admissible solutions of the vector optimization problem with respect to linear objective functions is carried out. The structure of the set of specifically perturbed ordering cones with different values of the parameter of perturbations of the input data is studied.