ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.176

Є. В. Бондаренко

Ріст графів дії скінченних автоматів

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглядаються графи дії $\Gamma_n(\mathsf{A})$ і $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ для обмежених і поліноміальних автоматів A, які моделюють дію автоматів на словах довжиною n і нескінченних словах відповідно. Встановлено метод знаходження орбітального коефіцієнта стиску обмежених автоматів, росту діаметрів графів $\Gamma_n(\mathsf{A})$ для обмежених автоматів, наведено оцінки на степінь поліноміального росту графів $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$. Доведено, що графи $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ для недетермінованих поліноміальних автоматів мають субекспоненційний ріст.

1. Автомати є абстрактними математичними моделями послідовних машин. У 1960-х роках В. М. Глушков [1] започаткував дослідження автоматів з алгебраїчної точки зору, розглядаючи перетворення, визначені автоматами, і напівгрупи та групи, породжені такими перетвореннями. За минулі півстоліття були знайдені глибокі зв'язки між алгебраїчною теорією автоматів, динамічними системами, геометрією і теорією груп (див. [2, 3]). Одними з ключових комбінаторних об'єктів, асоційованих з автоматами, є графи дії автоматів, які моделюють дію автоматів на скінченних та нескінченних послідовностях і несуть важливу інформацію про геометричні і топологічні об'єкти, асоційовані з автоматами.

У даній роботі розглядаються різні асимптотичні властивості графів дії обмежених і поліноміальних автоматів. Зокрема, вказано метод знаходження експоненти росту діаметрів графів дії обмежених автоматів на скінченних словах, орбітального коефіцієнта стиску обмежених автоматів, наведено оцінки на степінь поліноміального росту орбітальних графів дії обмежених автоматів. За аналогією з означенням С. Сідкі, введено поняття недетермінованого поліноміального автомата і доведено, що графи дії таких автоматів мають субекспоненційний ріст, а проблема слів у напівгрупах, породжених цими автоматами, розв'язується за субекспоненційний час.

2. Нехай X — скінченна множина потужності $|X| \geqslant 2$, яку будемо називати *алфавітом*. Нехай X^* — множина всіх скінченних слів $x_1x_2\ldots x_n$, $x_i \in X$, $n \in \mathbb{N}$, а X^∞ — множина всіх нескінченних вправо слів (послідовностей) $x_1x_2\ldots$, $x_i \in X$.

Автомати. Детермінованим синхронним автоматом над алфавітом X називається набір $\mathsf{A} = (Q, \pi, \lambda)$ де Q — множина станів автомата; $\pi\colon X \times Q \to Q$ — функція переходів;

$\lambda\colon X \times Q \to X$ — функція виходів. Такі автомати також називають автоматами Мілі. Автомат називається скінченним, якщо множина його станів скінченна. Скінченний автомат A можна задавати поміченим орієнтованим графом T_{A} (діаграма Мура або граф переходів), вершинами якого є стани автомата, а стрілками є $q \to \pi(x, q)$ з міткою $x|\lambda(x, q)$ для всіх $q \in Q$ і $x \in X$. Такий граф містить повну інформацію про автомат, і ми будемо ототожнювати автомат з відповідним графом.

Автомат перетворює слова $x_1x_2\ldots \in X^* \bigcup X^\infty$ таким чином: якщо автомат знаходиться в стані $q_1 \in Q$, він читає першу літеру x_1, виводить літеру $y_1 = \lambda(x_1, q_1)$ і переходить у стан $q_2 = \pi(x_1, q_1)$; залишок слова обробляється так само з нового стану q_2 і т. д. Отже, кожен стан автомата визначає відображення $\mathsf{A}_q\colon X^* \to X^*$, $q \in Q$, де $\mathsf{A}_q(x_1x_2\ldots) = y_1y_2\ldots$ тоді і лише тоді, коли автомат містить орієнтований шлях, який починається в стані q і помічений парами $x_1|y_1$, $x_2|y_2$, $\ldots$. Якщо кожне з відображень A_q є оборотним (автомат A є оборотним), то можна розглянути групу $G(\mathsf{A}) = \langle \mathsf{A}_q\colon q \in Q\rangle$, яка називається автоматною групою автомата A.

Оскільки нас буде цікавити саме дія автоматів на словах, то ми завжди припускатимемо, що різні стани автомата визначають різні функції, тобто автомат є мінімізованим. Кожен скінченний автомат з n станами над алфавітом з m літер можна мінімізувати за час $O(nm\log(n))$ (алгоритм Хопкрофта).

Графи дії автоматів. Нехай A — автомат над алфавітом X. Графом дії $\Gamma_n(\mathsf{A}) = \Gamma(\mathsf{A}, X^n)$ автомата A на множині X^n називається граф з множиною вершин X^n, в якому два слова $x_1x_2\ldots x_n$ та $y_1y_2\ldots y_n$ з'єднані ребром тоді і лише тоді, коли $y_1y_2\ldots y_n = \mathsf{A}_q(x_1x_2\ldots x_n)$ для деякого стану $q \in \mathsf{A}$, іншими словами, в графі переходів T_{A} існує орієнтований шлях e_1, $e_2, \ldots, e_n$, де кожне ребро e_i помічене парою $x_i|y_i$. Аналогічно визначаються графи $\Gamma(\mathsf{A}, X^*)$ і $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$. Зокрема, відношення суміжності в графі $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ задається автоматом A. Якщо автомат A скінченний, то граф $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ є локально скінченним, тобто кожна вершина графа має скінченну кількість сусідніх вершин.

Розглядаючи асимптотичні властивості графів дії скінченних автоматів, завжди можна припускати, що функція переходів π є сюр'єктивною, тобто в кожен стан автомата входить деяке ребро. Якщо автомат не має цієї властивості, то можна взяти максимальний підавтомат з сюр'єктивною функцією переходів; неважко показати, що графи дії цього автомата будуть мати ті самі асимптотичні властивості, що і графи дії початкового автомата.

Ріст графів. Нехай Γ — локально скінченний зв'язний граф. Функція росту $\gamma_v(n)$ графа Γ відносно його вершини v обчислює кількість вершин у замкненій кулі $B(v, n)$ радіусом n з центром у вершині v. Для того щоб позбутися залежності від вибору початкової вершини v, вводиться відношення еквівалентності на таких функціях. Для двох функцій f, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кажуть, що f має ріст, не більший за g, позначається $f \prec g$, якщо існує константа $C > 0$ така, що $f(n) \leqslant g(Cn)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Якщо $f \prec g$ і $g \prec f$, то кажуть, що f і g є еквівалентними $f \sim g$ і мають однаковий ріст. Для довільних двох вершин графа Γ відповідні функції росту є еквівалентними, і можна говорити про ріст γ_Γ графа Γ як про клас еквівалентності його функцій росту. Кажуть, що граф має субекспоненційний ріст, якщо $\gamma_\Gamma \prec 2^n$ і $\gamma_\Gamma \not\sim 2^n$. Граф має поліноміальний ріст, якщо його функція росту обмежена зверху поліномом. Якщо ріст графа субекспоненційний, але не поліноміальний, то кажуть, що граф має проміжний ріст.

3. Обмежені автомати. Стан автомата називається тривіальним, позначається e, якщо він визначає тривіальне перетворення простору X^*. Скінченний оборотний автомат A називається обмеженим, якщо виконується одна з таких еквівалентних умов (див. [4]):

1) кількість нескінченних вліво (еквівалентно, вправо) орієнтованих шляхів $\ldots e_2, e_1$ в графі переходів T_{A}, які не проходять через тривіальний стан автомата, є скінченною;

2) кожні два цикли в графі $T_{\mathsf{A}} \setminus \{e\}$ є диз'юнктними (не мають спільних вершин) і не з'єднані орієнтованим шляхом;

3) кількість шляхів довжиною n в графі $T_{\mathsf{A}} \setminus \{e\}$ обмежена незалежно від n.

Опишемо, як знайти ріст діаметрів графів дії $\Gamma_n(\mathsf{A})$ для обмежених автоматів A. Для цього розглянемо відстані між скінченним числом спеціальних вершин в Γ_n. Для обмеженого автомата A послідовність $\ldots x_2 x_1$, $x_i \in X$, називається посткритичною, якщо вона читається вздовж нескінченного вліво шляху в графі $T_{\mathsf{A}} \setminus \{e\}$. Множина P_{A} всіх посткритичних послідовностей є скінченною і називається посткритичною множиною автомата A. Для послідовності $w = \ldots x_2 x_1$ позначимо $w_n = x_n \ldots x_2 x_1$. Для кожної пари посткритичних послідовностей p, $q \in \mathsf{P}_{\mathsf{A}}$, $p \neq q$, позначимо через $d_n(p,q)$ відстань між вершинами p_n і q_n в графі дії $\Gamma_n(\mathsf{A})$. Нехай $d_n(\mathsf{A})$ — це вектор з координатами $d_n(p,q)$.

Теорема 1. *Нехай A — обмежений автомат з сюр'єктивною функцією переходів. Існує скінченна множина невід'ємних цілочисельних матриць K і константи c_1, $c_2 > 0$ такі, що для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ виконується*

$$c_1 \min_{M_i \in K} M_1 M_2 \ldots M_n \mathbf{1} \leqslant d_n(\mathsf{A}) \leqslant c_2 \min_{M_i \in K} M_1 M_2 \ldots M_n \mathbf{1} + c_2,$$

де мінімум береться окремо по кожній координаті, і $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

Множина K з теореми будується алгоритмічно за обмеженим автоматом. У роботі [5] доведено, що існує невід'ємна цілочисельна матриця M і константи c_1, $c_2 > 0$ такі, що для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ виконується

$$c_1 M^n \mathbf{1} \leqslant \min_{M_i \in K} M_1 M_2 \ldots M_n \mathbf{1} \leqslant c_2 M^n \mathbf{1}.$$

Крім того, така матриця M алгоритмічно будується за множиною K. Це дозволяє знайти асимптотичну поведінку відстані $d_n(p,q)$ для всіх p, $q \in \mathsf{P}_{\mathsf{A}}$. Зокрема, $d_n(p,q) \approx n^k \lambda^n$ для деяких $k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, які залежать від p, q. Визначимо $\lambda_{\min}$ і $\lambda_{\max}$ як мінімальне і максимальне серед усіх $\lambda > 1$, які з'являються в асимптотичному розкладі $d_n(p,q)$ для p, $q \in \mathsf{P}_{\mathsf{A}}$. Нехай $k_{\max}$ — це максимальне k серед $d_n(p,q) \approx n^k \lambda_{\max}^n$.

Теорема 2. *Нехай A — обмежений автомат з сюр'єктивною функцією переходів, і константи $k_{\max}$, $\lambda_{\max}$ визначаються за A, як показано вище. Існують константи c_1, $c_2 > 0$ такі, що для всіх достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ виконується*

$$c_1 n^{k_{\max}} \lambda_{\max}^n \leqslant \operatorname{diam}(\Gamma_n(\mathsf{A})) \leqslant c_2 n^{k_{\max}} \lambda_{\max}^n.$$

Теорема 3. *Нехай A — обмежений автомат з сюр'єктивною функцією переходів, і константа $\lambda_{\min}$ визначається за A, як показано вище. Тоді*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\limsup_{x_i, y_i \in X, m \geqslant n} \frac{\operatorname{dist}_{\Gamma_{m-n}}(x_{n+1} \ldots x_m, y_{n+1} \ldots y_m)}{\operatorname{dist}_{\Gamma_m}(x_1 x_2 \ldots x_m, y_1 y_2 \ldots y_m)}} = \frac{1}{\lambda_{\min}}.$$

Величина в лівій частині рівності називається орбітальним коефіцієнтом стиску автомата.

Наслідок 1. *Нехай A — обмежений автомат з сюр'єктивною функцією переходів і зв'язними графами дії $\Gamma_n(\mathsf{A})$. Тоді кожна зв'язна компонента графа $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ (орбітальні графи дії автомата) має поліноміальний ріст, де степінь росту лежить між $\log |X| / \log \lambda_{\max}$ і $\log |X| / \log \lambda_{\min}$.*

4. Поліноміальні автомати. Скінченний оборотний автомат A називається поліноміальним, якщо виконується одна з таких еквівалентних умов: 1) кожні два цикли в графі $T_{\mathsf{A}} \setminus \{e\}$ є диз'юнктними; 2) кількість шляхів довжиною n в графі $T_{\mathsf{A}} \setminus \{e\}$ обмежена поліномом від n. У роботі [6] доведено, що для поліноміальних автоматів кожна зв'язна компонента графа дії $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ має субекспоненційний ріст. Покажемо, як цей результат можна перенести на недетерміновані автомати.

Недетерміновані автомати відрізняються від детермінованих тим, що функції переходів і виходів визначаються неоднозначно (автомат може знаходитися в декількох станах одночасно). Формально, *недетермінованим синхронним автоматом* над алфавітом X будемо називати помічений орієнтований граф, в якому мітками стрілок є пари $x|y$ для x, $y \in X$. Вершини графа називаються станами автомата. Недетермінованість такого автомата полягає в тому, що з однієї вершини може виходити кілька стрілок, помічених парами $x|*$ з одним і тим самим x.

Для недетермінованих автоматів кожен стан $q \in \mathsf{A}$ визначає частково визначену багатозначну функцію A_q. Множиною допустимих значень $\operatorname{Dom} \mathsf{A}_q$ є всі послідовності, що читаються вздовж орієнтованих шляхів з початком у вершині q. Образом послідовності $x_1x_2\ldots$ є всі послідовності $y_1y_2\ldots$, для яких існує орієнтований шлях $e_1e_2\ldots$ в A, що починається у вершині q, і ребро e_i, помічене парою $x_i|y_i$ для всіх i.

Тривіальними станами недетермінованого автомата називатимемо такі стани, які визначають тривіальну частково визначену функцію, тобто $\mathsf{A}_q(w) = w$ для всіх допустимих w. У детермінованих автоматів може бути не більше одного тривіального стану, який відповідає тотожному відображенню. Для недетермінованих автоматів таких станів може бути багато (вони можуть відрізнятися областями визначеності). Множину всіх тривіальних станів автомата позначаємо A_E.

Скінченний недетермінований автомат A будемо називати поліноміальним, якщо в графі $\mathsf{A} \setminus \mathsf{A}_E$ різні цикли є диз'юнктними. Максимальну кількість циклів в $\mathsf{A} \setminus \mathsf{A}_E$, які з'єднані орієнтованим шляхом, називатимемо степенем поліноміального автомата A. Ця термінологія пояснюється таким спостереженням: скінченний автомат є поліноміальним степеня $\leqslant m$ тоді і лише тоді, коли кількість орієнтованих шляхів в $\mathsf{A} \setminus \mathsf{A}_E$ довжиною n обмежена поліномом від n степеня m.

Граф дії $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ визначається аналогічно: вершини u, $v \in X^\infty$ з'єднані ребром, якщо $u \in \operatorname{Dom} A_q$ і $v \in A_q(u)$ для деякого стану q, тобто пара $u|v$ читається вздовж деякого орієнтованого шляху в автоматі A. Для поліноміальних автоматів граф дії $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ є локально скінченним, і ми можемо розглянути ріст його зв'язних компонент.

Теорема 4. *Нехай A — поліноміальний автомат степеня m. Тоді існує константа C така, що кожна зв'язна компонента графа дії $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ має ріст, не більший за $C^{(\log n)^{m+1}}$.*

Крім того, оцінка є точною: для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує поліноміальний автомат степеня m і константа $D > 0$ такі, що кожна зв'язна компонента графа $\Gamma(\mathsf{A}, X^\infty)$ має ріст, не менший за $D^{(\log n)^{m+1}}$. Таким чином можна будувати графи дії скінченних автоматів з проміжним ростом.

Теорема 5. *Зафіксуємо скінченний алфавіт X і кількість станів m. Існує алгоритм, який за субекспоненційний час від n перевіряє для даного поліноміального автомата A над алфавітом X із m станами та набору його станів q_1, $q_2, \ldots, q_n \in \mathsf{A}$, чи являє собою добуток $\mathsf{A}_{q_1}\mathsf{A}_{q_2}\ldots\mathsf{A}_{q_n}$ тривіальну частково визначену функцію.*

Зокрема, проблема слів у напівгрупах, породжених станами поліноміальних автоматів, розв'язується за субекспоненційний час.

1. *Глушков В. М.* Абстрактная теория автоматов // Усп. мат. наук. – 1961. – **16**, № 5. – С. 3–62.
2. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2000. – **231**. – С. 134–214.
3. *Nekrashevych V.* Self-similar groups. – Providence, RI: AMS, 2005. – 231 p.
4. *Sidki S.* Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure, and acyclicity // J. Math. Sci. (New York). – 2000. – **100**, No 1. – P. 1925. – 1943.
5. *Bondarenko I.* Dynamics of piecewise linear maps and sets of nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**, No 5–7. – P. 495–510.
6. *Bondarenko I.* Growth of Schreier graphs of automaton groups // Math. Ann. – 2012. – **354**, No 2. – P. 765–785.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 21.10.2013

Е. В. Бондаренко

Рост графов действия конечных автоматов

Рассматриваются графы действия $\Gamma_n(\mathsf{A})$ и $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ для ограниченных и полиномиальных автоматов A, которые моделируют действие автоматов на словах длиной n и бесконечных словах соответственно. Установлен метод нахождения орбитального коэффициента стягивания ограниченных автоматов, роста диаметров графов $\Gamma_n(\mathsf{A})$ для ограниченных автоматов, приведены оценки на степень полиномиального роста графов $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$. Доказано, что графы $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ для недетерминированных полиномиальных автоматов имеют субэкспоненциальный рост.

I. V. Bondarenko

Growth of action graphs of finite automata

We consider the action graphs $\Gamma_n(\mathsf{A})$ and $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ for bounded and polynomial automata A, which model the action of automata on words of length n and infinite words, respectively. A method for finding the orbital contracting coefficient and the growth of the diameters of graphs $\Gamma_n(\mathsf{A})$ for a bounded automaton is established. We give estimates on the growth degrees of the graphs $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ for bounded automata. It is proved that the graphs $\Gamma_\infty(\mathsf{A})$ for non-deterministic polynomial automata have subexponential growth.