УДК 517.95

Н. М. Шаповал

Група точкових симетрій системи вільних рівнянь другого порядку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Доведено, що повною групою точкових симетрій системи вільних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку є загальна проективна група, що діє у просторі незалежних і залежних змінних.

Групові властивості звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) добре вивчені, чого, на жаль, не можна сказати про системи ЗДР. Важливим результатом про розмірність максимальних алгебр інваріантності систем ЗДР другого порядку є твердження, одержане Л. Маркусом [1, с. 68–69]. А саме, ним доведено, що для будь-якої системи ЗДР другого порядку

$$\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_t), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x} = (x^1(t), \ldots, x^n(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_t = d\boldsymbol{x}/dt$, $\boldsymbol{x}_{tt} = d\boldsymbol{x}_t/dt$, розмірність її максимальної алгебри інваріантності не перевищує $(n+2)^2 - 1$. Пізніше це твердження було перевідкрито у роботі [2]. Необхідну та достатню умову зведення лінійних систем вигляду (1) до системи вільних рівнянь другого порядку

$$\boldsymbol{x}_{tt} = 0 \tag{2}$$

отримано в [3]. Відзначимо, що система (2) інваріантна відносно алгебри $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{F})$ з базисними елементами (див. [2])

$$\partial_t, \qquad \partial_a, \qquad t\partial_t, \qquad x^a\partial_t, \qquad t\partial_a, \qquad x^a\partial_b, \qquad tx^a\partial_t + x^ax^c\partial_c, \qquad t^2\partial_t + tx^c\partial_c,$$

де $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ для дійсного або комплексного випадку відповідно. Тут і далі a, b, c, $i = \overline{1, n}$, μ, ν, σ, $\sigma' = \overline{0, n}$, і за індексами, що повторюються, розуміємо підсумовування за всіма їх можливими значеннями, а $\partial_t = \partial/\partial_t$, $\partial_a = \partial/\partial_{x^a}$. Нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними. Питання еквівалентності систем (1) і (2) відносно точкових перетворень розглянуто Дж. Меркером у роботі [4]. Усі вищенаведені результати для систем ЗДР другого порядку є нетривіальними узагальненнями класичних результатів С. Лі [5] щодо ЗДР другого порядку. Більш детальний огляд відомих результатів щодо групового аналізу систем ЗДР другого порядку наведено в [6].

Основним результатом цієї роботи є строге доведення нижченаведеної теореми.

Теорема. *Повною групою точкових симетрій системи* (2) *є загальна проективна група* $\mathrm{PGL}(n+2, \mathbb{F})$ *у просторі* $\mathbb{F}^{n+1}$, *що складається з невироджених проективних перетворень*

$$\widetilde{x}^\mu = \frac{\alpha_{\mu,0}x^0 + \cdots + \alpha_{\mu,n}x^n + \alpha_{\mu,n+1}}{\beta_0x^0 + \cdots + \beta_nx^n + \beta_{n+1}}, \tag{3}$$

де $\alpha_{0,0},\ldots,\alpha_{n,n+1}$ та $\beta_0,\ldots,\beta_{n+1}$ — групові параметри, причому один з цих параметрів є несуттєвим, а $x^0 = t$.

Той факт, що система (2) інваріантна відносно групи $\mathrm{PGL}(n+2,\mathbb{F})$, давно відомий (див., наприклад, [2]). Його можна довести, відновивши групу $\mathrm{PGL}(n+2,\mathbb{F})$ з вищенаведеної алгебри векторних полів $\mathfrak{sl}(n+2,\mathbb{F})$. У дійсному випадку необхідно також врахувати, додатково до неперервної компоненти одиниці, очевидне дискретне перетворення, що відповідає заміні знаку однієї зі змінних. Проблема полягає в тому, щоб показати, що перетворення вигляду (3) вичерпують усі можливі точкові симетрії системи (2).

Доведення теореми. Використаємо прямий метод знаходження точкових симетрій [7]. Припустимо, що заміна змінних

$$\tilde t = T(t,\boldsymbol{x}), \qquad \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x})$$

зводить вихідну систему (2) до тієї ж системи $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t\tilde t} = \boldsymbol{0}$ у нових змінних $(\tilde t,\tilde{\boldsymbol{x}})$ і якобіан перетворення $J = |\partial(T,\boldsymbol{X})/\partial(t,\boldsymbol{x})|$ не дорівнює нулю. Запишемо вираз для другої похідної $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t\tilde t}$ у старих змінних $(t,\boldsymbol{x})$:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{\tilde t\tilde t} = \frac{1}{D_tT}D_t\left(\frac{D_t\boldsymbol{X}}{D_tT}\right),$$

де D_t — оператор повної похідної за змінною t, $D_t = \partial_t + x^a_t\partial_{x^a} + x^a_{tt}\partial_{x^a_t} + \cdots$. Підставивши цей вираз у систему (2) та перейшовши на її многовид, отримаємо систему визначальних рівнянь

$$(T_t + x^c_tT_c)(X^i_{tt} + 2x^a_tX^i_{ta} + x^a_tx^b_tX^i_{ab}) = (X^i_t + x^a_tX^i_a)(T_{tt} + 2x^b_tT_{tb} + x^b_tx^c_tT_{bc}) \tag{4}$$

для знаходження невідомих функцій T та $\boldsymbol{X}$, яку необхідно додатково розщепити за похідними x^a_t. Введемо позначення $\widehat D_t = \partial_t + x^a_t\partial_{x^a}$ для оператора повної похідної за змінною t на многовиді системи (2), при цьому $\widehat D_t^2 = \partial_{tt} + 2x^a_t\partial_{x^a} + x^a_tx^b_t\partial_{x^ax^b}$. Використавши це позначення, запишемо систему рівнянь (4) у більш компактній формі

$$(\widehat D_tT)\widehat D_t^2X^i = (\widehat D_tX^i)\widehat D_t^2T. \tag{5}$$

Зауважимо, що обидві частини рівності є добутком поліномів від похідних x^a_t. Розглянемо один з множників, а саме $\widehat D_tT = T_t + x^c_tT_c$. Оскільки ліва частина (5) ділиться на цей многочлен, то й права частина також ділиться на нього. Покажемо, що $\widehat D_tT$ ділить $\widehat D_t^2T$, а відповідна частка є поліномом степеня не вище першого від x^a_t. Якщо $T_c = 0$ для всіх значень c, то $\widehat D_tT$ — поліном нульового степеня відносно x^a_t, а такий поліном ділить обидва множники правої частини (5). Нехай $T_c \neq 0$ для деякого значення c. Тоді $\widehat D_tT$ є поліномом першого степеня від x^a_t, а тому ділить один з множників у правій частині рівняння (5). Припустимо, що $\widehat D_tT$ ділить $\widehat D_tX^i$ для деякого i. Тоді відповідна частка $\lambda^i(t,\boldsymbol{x})$ не залежить від похідних x^a_t, тобто $\widehat D_tX^i/\widehat D_tT = \lambda^i(t,\boldsymbol{x})$ або $\widehat D_tX^i = \lambda^i(t,\boldsymbol{x})\widehat D_tT$. Зібравши коефіцієнти при похідних x^a_t в останній рівності, маємо

$$X^i_t = \lambda^i(t,\boldsymbol{x})T_t, \qquad X^i_a = \lambda^i(t,\boldsymbol{x})T_a.$$

Звідси випливає, що деякі рядки якобіана J пропорційні, тобто $J = 0$, а це неможливо. Отже, $\widehat D_tT$ ділить $\widehat D_t^2T$, при цьому $\widehat D_t^2X^i$ ділиться на $\widehat D_tX^i$, і відношення цих поліномів не залежить від значення індексу i, тобто існують функції $\lambda^\mu = \lambda^\mu(t,\boldsymbol{x})$ такі, що

$$\frac{\widehat D_t^2T}{\widehat D_tT} = \frac{\widehat D_t^2X^i}{\widehat D_tX^i} = \lambda^0 + x^a_t\lambda^a$$

для кожного фіксованого значення i. Перепишемо цю рівність у вигляді системи

$$\widehat{D}_t^2 T = (\lambda^0 + x_t^a \lambda^a)\widehat{D}_t T, \widehat{D}_t^2 X^i = (\lambda^0 + x_t^a \lambda^a)\widehat{D}_t X^i.$$

Зручно позначити $t = x^0$, $T = X^0$. Тоді останню систему можна зобразити у більш компактному вигляді

$$x_t^\nu x_t^\sigma X^\mu_{\nu\sigma} = x_t^\nu \lambda^\nu X^\mu_\sigma x_t^\sigma.$$

Зауважимо, що хоча $x_t^0 = 1$, однак при розщепленні за похідними x_t^a можна і зручно вважати, що похідна x_t^0 також варіюється. Розщеплення дає систему

$$X^\mu_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\lambda^\nu X^\mu_\sigma + \lambda^\sigma X^\mu_\nu). \tag{6}$$

Розглянемо два рівняння із системи для фіксованих значень трійки індексів (μ, ν, σ), а саме рівняння вигляду (6) та рівняння

$$X^\mu_{\nu\sigma'} = \frac{1}{2}(\lambda^\nu X^\mu_{\sigma'} + \lambda^{\sigma'} X^\mu_\nu). \tag{7}$$

Виконаємо перехресне диференціювання, тобто продиференціюємо рівняння (6) за змінною $x^{\sigma'}$, а рівняння (7) — за змінною x^σ. У результаті отримаємо рівняння

$$X^\mu_{\nu\sigma\sigma'} = \frac{1}{2}(\lambda^\nu_{\sigma'} X^\mu_\sigma + \lambda^\nu X^\mu_{\sigma\sigma'} + \lambda^\sigma_{\sigma'} X^\mu_\nu + \lambda^\sigma X^\mu_{\nu\sigma'}),$$

$$X^\mu_{\nu\sigma'\sigma} = \frac{1}{2}(\lambda^\nu_\sigma X^\mu_{\sigma'} + \lambda^\nu X^\mu_{\sigma'\sigma} + \lambda^{\sigma'}_\sigma X^\mu_\nu + \lambda^{\sigma'} X^\mu_{\nu\sigma}),$$

ліві частини яких рівні. Віднявши одне рівняння від іншого та підставивши замість других похідних функцій X^μ відповідні вирази з (6) та (7), отримаємо рівність

$$(\lambda^\sigma_{\sigma'} - \lambda^{\sigma'}_\sigma)X^\mu_\nu - \left(\lambda^\nu_\sigma - \frac{1}{2}\lambda^\nu\lambda^\sigma\right)X^\mu_{\sigma'} + \left(\lambda^\nu_{\sigma'} - \frac{1}{2}\lambda^\nu\lambda^{\sigma'}\right)X^\mu_\sigma = 0. \tag{8}$$

Зафіксуємо попарно різні значення індексів ν, σ і σ'. Виберемо трійку (μ_1, μ_2, μ_3) так, що

$$\left|\frac{\partial(X^{\mu_1}, X^{\mu_2}, X^{\mu_3})}{\partial(x^\nu, x^\sigma, x^{\sigma'})}\right| \neq 0.$$

Розглянемо підсистему (8) з відповідними індексами як систему алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти при похідних функцій X^μ. Внаслідок своєї невиродженості вона має тільки нульовий розв'язок, тобто

$$\lambda^\sigma_{\sigma'} = \lambda^{\sigma'}_\sigma, \qquad \lambda^\nu_\sigma = \frac{1}{2}\lambda^\nu\lambda^\sigma.$$

З рівнянь $\lambda^\sigma_{\sigma'} = \lambda^{\sigma'}_\sigma$ випливає, що локально існує така функція $\Phi = \Phi(t, \boldsymbol{x})$, що $\lambda^\sigma = \Phi_\sigma$. Далі розглянемо рівність (8) при $\nu = \sigma$:

$$(\lambda^\sigma_{\sigma'} - \lambda^{\sigma'}_\sigma)X^\mu_\nu - \left(\lambda^\nu_\nu - \frac{1}{2}(\lambda^\nu)^2\right)X^\mu_{\sigma'} + \left(\lambda^\nu_{\sigma'} - \frac{1}{2}\lambda^\nu\lambda^{\sigma'}\right)X^\mu_\nu = 0.$$

Виберемо пару індексів (μ_1, μ_2) таку, що

$$\left|\frac{\partial(X^{\mu_1}, X^{\mu_2})}{\partial(x^\nu, x^{\sigma'})}\right| \neq 0.$$

Тоді, аналогічно до попереднього випадку, отримаємо $\lambda^\nu_\nu = (\lambda^\nu)^2/2$. Беручи до уваги цю рівність, можна стверджувати, що рівняння $\lambda^\nu_\sigma = \lambda^\nu\lambda^\sigma/2$ виконуються для будь-яких значень індексів ν та σ, у тому числі і рівних. Перепишемо рівняння $\lambda^\nu_\sigma = \lambda^\nu\lambda^\sigma/2$ та систему (6) у термінах функції Φ:

$$\Phi_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}\Phi_\nu\Phi_\sigma = 0, \qquad X^\mu_{\nu\sigma} - \frac{1}{2}(\Phi_\nu X^\mu_\sigma + \Phi_\sigma X^\mu_\nu) = 0.$$

Домножимо кожне з цих рівнянь на $e^{-\Phi/2}$ і згорнемо їх праві частини в окремі похідні: $(e^{-\Phi/2})_{\nu\sigma} = 0$, $(e^{-\Phi/2}X^\mu)_{\nu\sigma} = 0$. Оскільки ці рівності виконуються для будь-яких значень індексів ν і σ, то

$$e^{-\frac{1}{2}\Phi} = \beta_0 x^0 + \beta_1 x^1 + \cdots + \beta_n x^n + \beta_{n+1},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\Phi} X^\mu = \alpha_{\mu,0}x^0 + \alpha_{\mu,1}x^1 + \cdots + \alpha_{\mu,n}x^n + \alpha_{\mu,n+1},$$

де $(\alpha_{\mu,0}, \ldots, \alpha_{\mu,n+1})$, $(\beta_0, \ldots, \beta_{n+1})$ — набори сталих, що утворюють невироджену $(n+2) \times$ $\times\ (n+2)$ матрицю. Отже,

$$X^\mu = \frac{\alpha_{\mu,0}x^0 + \alpha_{\mu,1}x^1 + \cdots + \alpha_{\mu,n}x^n + \alpha_{\mu,n+1}}{\beta_0 x^0 + \beta_1 x^1 + \cdots + \beta_n x^n + \beta_{n+1}},$$

тобто X^μ є дробово-лінійними функціями від змінних x^ν та збігаються з правими частинами (3).

Таким чином, теорему доведено.

Застосований метод доведення можна поширити на довільні системи лінійних ЗДР другого порядку. Він також буде корисним при обчисленні групоїда еквівалентності класу таких систем з довільною фіксованою кількістю залежних змінних. Було б також цікаво довести теорему цієї роботи в рамках алгебраїчного підходу [7–10].

Автор висловлює щиру подяку Р. О. Поповичу та В. М. Бойко за постановку задачі, постійну увагу та допомогу в роботі.

1. *Markus L.* Group theory and differential equations. – Minneapolis: Univ. of Minnesota, 1960. – 227 p.
2. *González-Gascón F., González-López A.* Symmetries of differential equations. IV // J. Math. Phys. – 1983. – **24**. – P. 2006–2021.
3. *González-López A.* Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations // Ibid. – 1988. – **29**. – P. 1097–1105.
4. *Merker J.* Characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables // Acta Appl. Math. – 2006. – **92**. – P. 125–207.
5. *Lie S.* Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. – Leipzig: Teubner, 1891. – 568 s.
6. *Boyko V. M., Popovych R. O., Shapoval N. M.* Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – **397**. – P. 434–440.
7. *Bihlo A., Popovych R. O.* Point symmetry group of the barotropic vorticity equation // Proc. of 5th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Protaras, Cyprus, June 6–10, 2010). – 2011. – P. 15–27.

8. *Hydon P. E.* How to construct the discrete symmetries of partial differential equations // Eur. J. Appl. Math. – 2000. – **11**. – P. 515–527.
9. *Bihlo A., Popovych R. O.* Lie symmetry analysis and exact solutions of the quasi-geostrophic two-layer problem // J. Math. Phys. – 2011. – **52**. – 033103, 24 p.
10. *Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R. O.* Complete point symmetry group of vorticity equation on rotating sphere // J. Engrg. Math. – 2013. – **82**. – P. 31–38.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.12.2013

Н. Н. Шаповал

Группа точечных симметрий системы свободных уравнений второго порядка

Доказано, что полной группой точечных симметрий системы свободных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка является общая проективная группа, действующая в пространстве независимых и зависимых переменных.

N. M. Shapoval

The point symmetry group of a system of free second-order equations

It is proved that the complete point symmetry group of a system of free second-order ordinary differential equations is a projective general linear group acting in the space of independent and dependent variables.