УДК 517.956.4

В. Н. Лось, А. А. Мурач

Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины М. Л. Горбачуком)

Установлены теоремы о корректной разрешимости общей параболической начально-краевой задачи в некоторых классах гильбертовых пространств обобщенной гладкости. Последняя характеризуется числовыми параметрами и дополнительным функциональным параметром, который медленно меняется на бесконечности по Карамата. В качестве приложения даны новые достаточные условия непрерывности обобщенных производных заданного порядка решения задачи.

Общие параболические начально–краевые задачи достаточно полно исследованы в классических шкалах функциональных пространств Гельдера–Зигмунда и Соболева [1–5]. Центральное место в теории таких задач занимают теоремы об их корректной разрешимости в подходящих парах пространств, принадлежащих указанным шкалам. Эти теоремы имеют важные применения к исследованию свойств регулярности решений параболической задачи, свойств ее функции Грина и др. (см., например, [6]).

В этой связи представляет интерес исследование свойств параболических задач в шкалах функциональных пространств, более тонко градуированных, чем упомянутые выше классические шкалы. Гильбертовы пространства $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, введенные и систематически изученные Л. Хермандером [7] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [8], являются весьма перспективными в этом плане. Для этих пространств показателем регулярности функций/распределений служит не число, а достаточно общий функциональный параметр μ, зависящий от частотных переменных (двойственных к пространственным относительно преобразования Фурье). Такие пространства именуют пространствами обобщенной гладкости [9, 10]. Они имеют различные приложения в теории дифференциальных операторов и теории случайных процессов.

Так, недавно В. А. Михайлец и А. А. Мурач [11, 12] построили теорию общих эллиптических дифференциальных операторов и эллиптических краевых задач в гильбертовых шкалах пространств $H^{s,\varphi} := B_{2,\mu}$, для которых показателем регулярности служит функция вида $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$. Здесь числовой параметр s вещественный, а функциональный параметр φ медленно меняется на бесконечности по Й. Карамата. В основе этой теории лежит метод интерполяции гильбертовых пространств с функциональным параметром. Он позволяет вывести теоремы о свойствах эллиптических операторов из соответствующих теорем соболевской теории этих операторов. Метод интерполяции пространств оказывается весьма полезным и в теории параболических дифференциальных уравнений [3].

В настоящей работе мы установим теоремы о корректной разрешимости общей начально-краевой $2b$-параболической задачи в классах гильбертовых анизотропных пространств Хермандера $H^{s,s/(2b),\varphi}$, где параметры s и φ такие, как и в упомянутой эллиптической теории. В качестве применения будут получены новые достаточные условия непрерывности обобщенных производных (заданного порядка) решения задачи.

В двумерном случае общая параболическая задача с нулевыми начальными данными исследована нами в [13, 14].

1. Постановка задачи. Пусть произвольно заданы целое число $n \geqslant 2$, вещественное число $\tau > 0$ и ограниченная область $G \subset \mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой границей $\Gamma := \partial G$. Рассмотрим в цилиндре $\Omega := G \times (0,\tau)$, где $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — его боковая поверхность, параболическую начально-краевую задачу:

$$A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = f(x,t) \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\big|_S \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\leqslant m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t)$$
$$\text{при} \qquad x\in\Gamma, \qquad 0<t<\tau \qquad \text{для каждого} \qquad j\in\{1,\dots,m\}, \tag{2}$$

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = h_k(x) \qquad \text{при} \qquad x\in G \qquad \text{для каждого} \qquad k\in\{0,\dots,\varkappa-1\}. \tag{3}$$

Здесь b, m и все m_j — произвольно заданные целые числа, удовлетворяющие условиям $m \geqslant b \geqslant 1$, $\varkappa := m/b \in \mathbb{Z}$, и $m_j \geqslant 0$. Число $2b$ называется параболическим весом данной задачи. Все коэффициенты дифференциальных выражений $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ и $B_j := B_j(x,t,D_x,\partial_t)$ являются бесконечно гладкими комплекснозначными функциями: $a^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $b_j^{\alpha,\beta} \in C^\infty(\overline{S})$, где $\overline{\Omega} := \overline{G}\times[0,\tau]$, $\overline{S} := \Gamma\times[0,\tau]$.

В работе используются следующие обозначения для частных производных: $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k := i\partial/\partial x_k$ и $\partial_t := \partial/\partial t$. Здесь $x=(x_1,\dots,x_n)$ — произвольная точка пространства $\mathbb{R}^n$, а $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — мультииндекс и $|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_n$. В формулах (1) и (2) суммирование ведется по целым индексам $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta\geqslant 0$, которые удовлетворяют условиям, написанным под знаком суммы.

Напомним [1, § 9, п. 1], что начально-краевая задача (1)–(3) называется параболической в цилиндре Ω, если выполняются следующие два условия.

Условие 1. Для произвольных $x\in\overline{G}$, $t\in[0,\tau]$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $p\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$, верно

$$A^{(0)}(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\xi^\alpha p^\beta \neq 0 \qquad \text{как только} \qquad |\xi|+|p|\neq 0.$$

Произвольно выберем $x\in\Gamma$, $t\in[0,\tau]$, касательный вектор $\xi\in\mathbb{R}^n$ к границе Γ в точке x и число $p\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,p\geqslant 0$, такие, что $|\xi|+|p|\neq 0$. Пусть $\nu(x)$ — орт внутренней нормали к границе Γ в точке x. Из условия 1 следует, что многочлен $A^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ переменного $\zeta\in\mathbb{C}$ имеет точно m корней $\zeta_j^+(x,t,\xi,p)$, $j=1,\dots,m$, с положительной мнимой частью и m корней с отрицательной мнимой частью (с учетом их кратности).

Условие 2. При каждом таком выборе x, t, ξ и p многочлены

$$B_j^{(0)}(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)(\xi+\zeta\nu(x))^\alpha p^\beta, \qquad j=1,\dots,m,$$

переменного $\zeta\in\mathbb{C}$ линейно независимы по модулю многочлена $\prod\limits_{j=1}^{m}(\zeta-\zeta_j^+(x,t,\xi,p))$.

Отметим, что условие 1 — это условие $2b$-параболичности по И. Г. Петровскому дифференциального уравнения $Au=f$ в замкнутом цилиндре $\overline{\Omega}$, а условие 2 выражает тот факт, что система граничных дифференциальных операторов $\{B_1, \ldots, B_m\}$ накрывает дифференциальный оператор A на боковой поверхности $\overline{S}$ этого цилиндра.

2. Пространства обобщенной гладкости и уточненная шкала. Задачу (1)–(3) исследуем в шкалах гильбертовых функциональных пространств $H^{\mu} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, введенных независимо Л. Хермандером [7, п. 2.2] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [8, § 2, 3]. Показателем регулярности функций (или распределений), образующих пространство $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, где целое $k \geqslant 2$, служит измеримая по Борелю функция $\mu\colon \mathbb{R}^k \to (0, \infty)$, удовлетворяющая следующему условию: существуют положительные числа c и l такие, что $\mu(\xi)/\mu(\eta) \leqslant c(1 + |\xi - \eta|)^l$ для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^k$.

По определению, линейное пространство $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ состоит из всех медленно растущих распределений $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, преобразование Фурье $\widehat{w}$ которых является локально интегрируемой по Лебегу функцией и удовлетворяет условию

$$\|w\|^2_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := \int\limits_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(В работе распределения/функции предполагаются комплекснозначными.) Это пространство гильбертово относительно введенной нормы $\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}$.

Нам понадобятся следующие версии пространства $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ для произвольного открытого множества $V \neq \varnothing$. Линейное пространство $H^{\mu}(V)$ состоит, по определению, из сужений $u = w \restriction V$ всех распределений $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ на множество V. В этом пространстве задана норма по формуле

$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}\colon w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k), u = w \restriction V\}.$$

Линейное пространство $H^{\mu}_{+}(V)$ состоит, по определению, из сужений $u = w \restriction V$ всех распределений $w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, равных нулю при $x_k < 0$. Здесь $w = w(x', x_k)$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ и $x_k \in \mathbb{R}$. В этом пространстве определена норма по формуле

$$\|u\|_{H^{\mu}_{+}(V)} := \inf\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)}\colon w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k),\ w(x', x_k) \equiv 0 \text{ при } x_k < 0,\ u = w \restriction V\}.$$

Оно понадобится в случае, когда множество V примыкает к евклидову полупространству, заданному условием $x_k < 0$. Пространства $H^{\mu}(V)$ и $H^{\mu}_{+}(V)$ гильбертовы.

Для удобства обозначений в п. 2 положим $\gamma := 1/(2b)$. Будем использовать показатели регулярности вида

$$\mu(\xi', \xi_k) = (1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2} \varphi((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \tag{4}$$

где $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ и $\xi_k \in \mathbb{R}$ — аргументы функции μ. Здесь числовой параметр s вещественный, а функциональный параметр φ пробегает класс $\mathcal{M}$. Последний состоит из всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1, \infty) \to (0, \infty)$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

а) обе функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1, b]$, где $1 < b < \infty$;

б) функция φ медленно меняется по Й. Карамата на бесконечности, а именно, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \to 1$ при $r \to \infty$ для каждого $\lambda > 0$.

Теория медленно меняющихся функций (на бесконечности) изложена, например, в монографии [15]. Их важным примером служат функции вида

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} (\log\log r)^{\theta_2} \cdots (\underbrace{\log \cdots \log}_{k \text{ раз}} r)^{\theta_k} \qquad \text{при} \qquad r \gg 1,$$

где параметры $k \in \mathbb{N}$ и $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ произвольны.

Пусть $s \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{M}$. Решение u начально-краевой задачи (1)–(3) и правые части f уравнения (1) будем рассматривать в гильбертовых функциональных пространствах $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := H^{\mu}(\Omega)$ и $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Omega) := H^{\mu}_{+}(\Omega)$, где показатель μ определен по формуле (4), в которой $k := n+1$. (Последнее пространство понадобится в случае, когда все $h_k = 0$.)

Если $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ становится анизотропным гильбертовым пространством Соболева порядка $(s, s\gamma)$; обозначим его через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Здесь s — показатель регулярности распределения $u = u(x,t)$ по пространственной переменной $x \in G$, а $s\gamma$ — показатель регулярности по временно́й переменной $t \in (0,\tau)$. В общей ситуации, когда $\varphi \in \mathcal{M}$ произвольно, выполняются непрерывные и плотные вложения

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \qquad \text{при} \qquad s_0 < s < s_1. \tag{5}$$

Рассмотрим класс гильбертовых функциональных пространств

$$\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)\colon s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}. \tag{6}$$

Вложения (5) показывают, что в (6) функциональный параметр φ определяет дополнительную гладкость по отношению к основной анизотропной $(s, s\gamma)$-гладкости. Если $\varphi(r) \to \infty$ (либо $\varphi(r) \to 0$) при $r \to \infty$, то φ определяет позитивную (либо негативную) дополнительную гладкость. Иначе говоря, φ уточняет основную гладкость $(s, s\gamma)$. Поэтому естественно именовать класс пространств (6) уточненной анизотропной соболевской шкалой на Ω (коротко — уточненной шкалой). Здесь γ служит параметром анизотропии пространств, образующих эту шкалу.

Определим гильбертовы пространства, в которых рассматриваются правые части краевых и начальных условий задачи (1)–(3).

Пространства, к которым принадлежат правые части g_j краевых условий (2), заданы на боковой поверхности $S = \Gamma \times (0,\tau)$ цилиндра Ω и определяются с помощью локальных координат следующим образом. Для открытой полосы $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$ рассмотрим гильбертовы пространства $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi) := H^{\mu}(\Pi)$ и $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Pi) := H^{\mu}_{+}(\Pi)$, где показатель μ определен по формуле (4), в которой $k := n$. Выберем какой-либо конечный атлас из C^{∞}-структуры на замкнутом многообразии Γ, образованный локальными картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, где $j = 1, \ldots, \lambda$. Здесь открытые множества $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ составляют покрытие многообразия Γ. Кроме того, произвольно выберем функции $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, \lambda$, такие, что $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\lambda} \chi_j \equiv 1$ на Γ.

По определению, линейное пространство $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ состоит из всех распределений $v \in \mathcal{D}'(S)$ на многообразии S таких, что для каждого номера $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$ распределение $v_j(x,t) := \chi_j(\theta_j(x))v(\theta_j(x),t)$ аргументов $x \in \Gamma$ и $t \in (0,\tau)$ принадлежит к $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. В пространстве $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ задана норма по формуле

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|v_j\|^2_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)} \right)^{1/2}.$$

Оно гильбертово относительно этой нормы.

Заменив в этом определении пространство $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$ на $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(\Pi)$, получим определение гильбертового пространства $H^{s,s\gamma,\varphi}_{+}(S)$.

Введенные пространства $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ и $H_{+}^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ не зависят (с точностью до эквивалентности норм) от указанного выбора атласа и разбиения единицы на Γ.

Наконец, укажем пространства, в которых рассматриваются правые части h_k начальных условий (3). Это гильбертовы пространства $H^{s,\varphi}(G) := H^{\mu}(G)$ с показателем $\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi((1+|\xi|^2)^{1/2})$ аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Их систематически использовали В. А. Михайлец и А. А. Мурач в теории эллиптических краевых задач [11, 12].

Если $\varphi \equiv 1$, то введенные выше пространства становятся соболевскими пространствами (анизотропными на Ω и S либо изотропными на G). В этом случае будем опускать индекс φ в обозначениях пространств.

3. Основные результаты работы составляют теоремы об изоморфизмах, порожденных параболической начально-краевой задачей (1)–(3) в уточненной шкале. Сформулируем их.

Пусть σ_0 обозначает наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_0 \geqslant 2m, \qquad \sigma_0 \geqslant m_j + 1 \qquad \text{для всех} \qquad j \in \{1,\ldots,m\} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

В частности, если $m_j \leqslant 2m-1$ для каждого $j \in \{1,\ldots,m\}$, то $\sigma_0 = 2m$.

Представляет отдельный интерес [1, § 9] задача (1)–(3) в случае нулевых начальных данных, т. е. когда все $h_k \equiv 0$. В этом случае свяжем с ней линейное отображение

$$u \mapsto (Au, Bu) := (Au, B_1u, \ldots, B_mu), \qquad u \in C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Здесь $C_{+}^{\infty}(\overline{\Omega})$ — линейное пространство всех функций $u = u(x,t)$ класса $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ таких, что $\partial_t^{\beta} u(x,0) = 0$ для всех $x \in \overline{G}$ и $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть произвольно заданы параметры: вещественное число $s > \sigma_0$ и функция $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда отображение* (7) *продолжается единственным образом (по непрерывности) до изоморфизма*

$$(A,B)\colon H_{+}^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega) \leftrightarrow H_{+}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_{+}^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(S). \tag{8}$$

В общем случае ненулевых начальных данных свяжем с задачей (1)–(3) линейное отображение

$$u \mapsto \Lambda u := (Au, B_1u, \ldots, B_mu, u \restriction \overline{G}, \ldots, (\partial_t^{\varkappa-1}u) \restriction \overline{G}), \qquad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{9}$$

Теорема 2. *Пусть произвольно заданы параметры: вещественное число $s > \sigma_0$ и функция $\varphi \in \mathcal{M}$. Предположим, что $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ и $s/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$. Тогда отображение* (9) *продолжается единственным образом (по непрерывности) до изоморфизма*

$$\Lambda\colon H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}. \tag{10}$$

Здесь $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}$ обозначает подпространство пространства

$$\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi} := H^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}(\Omega) \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(S) \oplus \bigoplus_{k=0}^{\varkappa-1} H^{s-2bk-b,\varphi}(G),$$

образованное всеми векторами

$$F := (f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi},$$

которые удовлетворяют следующему условию согласования правых частей задачи (1)–(3). Для вектора F существует функция $v = v(x,t)$ класса $H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)$ такая, что

$$f - Av \in H_{+}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}(\Omega),$$

$$g_j - B_j v \in H_{+}^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b),\varphi}(S) \qquad \text{для всех} \qquad j \in \{1, \ldots, m\},$$

$$h_k = \partial_t^k v\big|_{t=0} \qquad \text{для всех} \qquad k \in \{0, \ldots, \varkappa - 1\}.$$

Это условие согласования можно сформулировать в эквивалентном и конструктивном виде без привлечения уточненной шкалы пространств (см., например, [2, с. 707]). А именно, оно состоит в том, что производные $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, которые можно вычислить из параболического уравнения (1) и начальных данных (3), должны удовлетворять при $x \in \Gamma$ краевым условиям (2) и соотношениям, получающимся в результате дифференцирования краевых условий по переменной t.

Отметим, что теорема 2 верна и в случае, когда параметр $s > \sigma_0$ удовлетворяет одному из условий $s + 1/2 \in \mathbb{Z}$ и $s/(2b) + 1/2 \in \mathbb{Z}$, если гильбертово пространство $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}$ определить с помощью интерполяции

$$\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi} := [\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b),\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b),\varphi}]_{1/2}.$$

Здесь число $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а правая часть равенства есть результат интерполяции указанной пары гильбертовых пространств с числовым параметром $1/2$.

В соболевском случае $\varphi \equiv 1$ теоремы 1 и 2 известны. Теорема 2 доказана М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком [1, теорема 12.1] в предположении, что число $s/(2b)$ целое (их результат охватывает предельный случай $s = \sigma_0$). Это предположение можно опустить, что следует из результата Н. В. Житарашу и С. Д. Эйдельмана [4, теорема 5.7]. Теорема 1 является важным частным случаем теоремы 2, если $s + 1/2 \notin \mathbb{Z}$ и $s/(2b) + 1/2 \notin \mathbb{Z}$.

4. Применение. В силу упомянутой теоремы Аграновича–Вишика каждому вектору $F \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}$ соответствует единственный прообраз $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ при отображении (10). Эту функцию-прообраз u называем обобщенным решением задачи (1)–(3) с правой частью $F = (f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1})$.

В качестве применения теоремы 2 дадим следующее достаточное условие непрерывности обобщенного решения u и его обобщенных частных производных заданного порядка.

Теорема 3. *Пусть произвольно выбрано целое число $q \geqslant 0$. Предположим, что функция $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3), правые части которой удовлетворяют условию*

$$F = (f, g_1, \ldots, g_m, h_0, \ldots, h_{\varkappa-1}) \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi},$$

где $s := 2bq + b + n/2 > \sigma_0$, а функциональный параметр $\varphi \in \mathcal{M}$ такой, что

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{t\varphi^2(t)} < \infty.$$

Тогда решение $u(x,t)$ и все его обобщенные частные производные $D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)$, для которых $|\alpha| + 2b\beta \leqslant 2bq$, являются непрерывными функциями на множестве $\overline{\Omega}$.

Если сформулировать аналог теоремы 3 для анизотропных соболевских пространств (случай $\varphi \equiv 1$), то придется заменить ее условие на более сильное: правые части задачи (1)–(3) удовлетворяют включению $F \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b)}$ при некотором $s > 2bq + b + n/2$. Это существенно огрубляет результат.

5. Обоснование результатов. Теорему 1 можно вывести из теоремы Аграновича–Вишика [1, теорема 12.1] посредством интерполяции с функциональным параметром анизотропных пространств Соболева. Определение и свойства этой интерполяции приведены, например, в [11, пп. 1.1, 2.4.2].

Наметим доказательство теоремы 1. Выберем число $\sigma_1 > s$ такое, что $\sigma_1/(2b) \in \mathbb{Z}$. В силу упомянутой теоремы Аграновича–Вишика имеем изоморфизм (8) при $\varphi \equiv 1$ и каждом $s \in \{\sigma_0, \sigma_1\}$. Определим интерполяционный функциональный параметр ψ по формулам $\psi(r) := r^{(s-\sigma_0)/(\sigma_1-\sigma_0)}\varphi(r^{1/(\sigma_1-\sigma_0)})$ при $r \geqslant 1$ и $\psi(r) := \varphi(1)$ при $0 < r < 1$. Применив интерполяцию с этим параметром к анизотропным соболевским пространствам, в которых действуют изоморфизмы (8) при $\varphi \equiv 1$ и $s \in \{\sigma_0, \sigma_1\}$, получим еще один изоморфизм

$$
\begin{aligned}
(A,B)\colon [H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega), H_+^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\Omega)]_\psi \leftrightarrow \\
\leftrightarrow [H_+^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega), H_+^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b)}(\Omega)]_\psi \oplus \\
\oplus \bigoplus_{j=1}^{m} [H_+^{\sigma_0-m_j-1/2,(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(S), H_+^{\sigma_1-m_j-1/2,(\sigma_1-m_j-1/2)/(2b)}(S)]_\psi.
\end{aligned}
$$

Здесь выражение $[E_1, E_2]_\psi$ обозначает гильбертово пространство, полученное в результате интерполяции с параметром ψ пары гильбертовых пространств E_1 и E_2. Можно показать, что интерполяционные пространства, в которых действует этот изоморфизм, совпадают (с точностью до эквивалентности норм) с соответствующими пространствами, фигурирующими в (8). Тем самым будет доказана теорема 1.

Так, исходя из определения интерполяции, непосредственно проверяется формула

$$
[H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{\sigma_1,\sigma_1/(2b)}(\mathbb{R}^{n+1})]_\psi = H^{s,s/(2b),\varphi}(\mathbb{R}^{n+1}).
$$

Отсюда выводятся необходимые интерполяционные формулы с помощью общих методов интерполяции пространств, заданных в евклидовых областях и на многообразиях (см., например, [11, пп. 2.1.2, 3.2]). В случае $n = 1$ соответствующие доказательства даны нами в [13, п. 5].

Теорема 2 выводится из теоремы 1 согласно схеме доказательства теоремы 10.1 статьи М. С. Аграновича и М. И. Вишика [1]. При этом решение задачи (1)–(3) ищется в виде $u = v + w$, где функция $v \in H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)$ фигурирует в условии согласования правых частей этой задачи, а функция $w \in H_+^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)$ является решением краевой задачи $Aw = f - Av$ в Ω и $B_j w = g_j - B_j v$ на S для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$. Функцию v можно выбрать так, чтобы выполнялась оценка

$$
\|v\|_{H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{H^{s-2m,(s-2m)/(2b),\varphi}(\Omega)} + c\sum_{k=0}^{\varkappa-1} \|h_k\|_{H^{s-2bk-b,\varphi}(G)}
$$

с некоторым числом $c > 0$, не зависящим от v и правых частей задачи. Требуемый изоморфизм (10) следует из этой оценки и теоремы 1.

Теорема 3 вытекает из теоремы 2, в силу которой $u \in H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)$, и некоторой версии теоремы вложения Л. Хермандера [7, теорема 2.2.7]. Согласно этой версии [14, п. 5], всякая функция $u \in H^{s,s/(2b),\varphi}(\Omega)$, где параметры s и φ удовлетворяют условию теоремы 3, имеет свойства гладкости, указанные в заключении этой теоремы.

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Lions J.-L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary-value problems and applications. Vol. 2. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.
4. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Параболические граничные задачи. – Кишинев: Штиинца, 1992. – 328 с.
5. *Eidel'man S. D.* Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205–316.
6. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща шк., 1990. – 200 с.
7. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p.
8. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
9. *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // Трибель Х. Теория функциональных пространств. – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.
10. *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // Ann. Mat. Pura Appl. – 2006. – **185**, No 1. – P. 1–62.
11. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. – (Доступно как arXiv: 1106.3214.).
12. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, No 2. – P. 211–281.
13. *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter // Meth. Funct. Anal. Topol. – 2013. – **19**, No 2. – P. 146–160.
14. *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219–234.
15. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.

Черниговский национальный технологический университет
Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.02.2014

В. М. Лось, О. О. Мурач

Параболічні мішані задачі у просторах узагальненої гладкості

Встановлено теореми про коректну розв'язність загальної параболічної початково-крайової задачі у деяких класах гільбертових просторів узагальненої гладкості. Остання характеризується числовими параметрами і додатковим функціональним параметром, який повільно змінюється на нескінченності за Караматою. Як застосування наведені нові достатні умови неперервності узагальнених похідних заданого порядку розв'язку задачі.

V. N. Los, A. A. Murach

Parabolic mixed problems in spaces of generalized smoothness

We prove theorems on a well-posedness of a general parabolic initial-boundary-value problem in some classes of Hilbert spaces of generalized smoothness. The latter is characterized by number parameters and a supplementary function parameter that varies slowly at infinity in Karamata's sense. As an application, we give new sufficient conditions under which some generalized derivatives of a solution to the problem should be continuous.