УДК 517.956,517.953,517.518.5

С. П. Дегтярев

Мультипликаторы Фурье в пространствах с частичным свойством Гельдера и их применение к оценкам Шаудера

(Представлено академиком НАН Украины А. М. Ковалевым)

Приведены сравнительно простые достаточные условия на мультипликатор Фурье для того, чтобы он отображал функции, удовлетворяющие условию Гельдера по части переменных в функции, удовлетворяющей условию Гельдера по всем переменным. С использованием этих достаточных условий доказана разрешимость в классах Гельдера начально-краевых задач для линеаризованного уравнения Кана–Хилларда с динамическими граничными условиями двух типов. Получены оценки Шаудера решений указанных задач.

Отправной точкой для написания данной работы послужила статья О. А. Ладыженской [1] (см. также [2]).

Пусть для натурального N

$$\gamma \in (0,1), \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N), \qquad \alpha_1 = 1, \qquad \alpha_k \in (0,1], \qquad k = \overline{2,N}. \tag{1}$$

Определим пространство $C^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)$ как пространство непрерывных в $\mathbb{R}^N$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{C^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)} \equiv |u|^{(\gamma\alpha)}_{\mathbb{R}^N} = |u|^{(0)}_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i=1}^{N} \langle u \rangle^{(\gamma\alpha_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N}, \tag{2}$$

где

$$ {}^{(0)}_{\mathbb{R}^N} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)|, \qquad \langle u \rangle^{(\gamma\alpha_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N, h>0} \frac{|u(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_N) - u(x)|}{h^{\gamma\alpha_i}}. \tag{3}$$

Наряду с пространствами $C^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)$ с показателями $\gamma\alpha_i < 1$ мы будем также рассматривать пространства $C^{\overline{l}}(\mathbb{R}^N)$, где $\overline{l} = (l_1, l_2, \dots, l_N)$, l_i — произвольные положительные нецелые числа. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{C^{\overline{l}}(\mathbb{R}^N)} \equiv |u|^{(\overline{l})}_{\mathbb{R}^N} = |u|^{(0)}_{\mathbb{R}^N} + \sum_{i=1}^{N} \langle u \rangle^{(l_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N}, \tag{4}$$

$$\langle u \rangle^{(l_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N, h>0} \frac{|D^{[l_i]}_{x_i} u(x_1,\dots,x_i+h,\dots,x_N) - D^{[l_i]}_{x_i} u(x)|}{h^{l_i-[l_i]}}, \tag{5}$$

где $[l_i]$ — целая часть числа l_i, $D^{[l_i]}_{x_i} u$ — производная порядка $[l_i]$ по переменной x_i от функции u. Полунорма (5) может быть определена эквивалентным образом, как

$$\langle u \rangle^{(l_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N} \simeq \sup_{x\in\mathbb{R}^N, h>0} \frac{|\Delta^k_{h,x_i} u(x)|}{h^{l_i}}, \qquad k > l_i, \tag{6}$$

где $\Delta_{h,x_i}u(x) = u(x_1, \ldots, x_i+h, \ldots, x_N) - u(x)$ — разность от функции $u(x)$ по переменной x_i с шагом h, $\Delta^k_{h,x_i}u(x) = \Delta_{h,x_i}(\Delta^{k-1}_{h,x_i}u(x)) = (\Delta_{h,x_i})^k u(x)$ — k раз примененная разность, т. е. разность степени k. Отметим, что функции из пространства $C^{\bar{l}}(\mathbb{R}^N)$ обладают также смешанными производными до определенных порядков, которые удовлетворяют условиям Гельдера по всем переменным с некоторыми показателями — в зависимости от соотношения показателей l_i.

Определим далее пространство функций $\mathcal{H}^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N) \subset C^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N) \bigcap L_2(\mathbb{R}^N)$ как замыкание множества финитных функций $u(x)$ из $C^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)$ в норме

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)} \equiv |u|_{L_2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \langle u \rangle^{(\gamma\alpha_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N}. \tag{7}$$

Аналогично определим пространство $\mathcal{H}^{\bar{l}}(\mathbb{R}^N)$ с произвольными нецелыми положительными l_i с нормой

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\bar{l}}(\mathbb{R}^N)} \equiv \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{i=1}^{N} \langle u \rangle^{(l_i)}_{x_i,\mathbb{R}^N}. \tag{8}$$

В [1] показано, что $|u|^{(0)}_{\mathbb{R}^N} \leqslant C\|u\|_{H^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)}$, так что

$$|u|^{(\gamma\alpha)}_{\mathbb{R}^N} \leqslant C\|u\|_{H^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N)}. \tag{9}$$

Здесь и всюду ниже мы будем обозначать через C, ν все абсолютные константы либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных.

Пусть функция $\widetilde{m}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, определена в $\mathbb{R}^N$, измерима и ограничена. Определим оператор $M\colon \mathcal{H}^{\gamma\alpha}(\mathbb{R}^N) \to L_2(\mathbb{R}^N)$ по формуле

$$Mu \equiv F^{-1}(\widetilde{m}(\xi)\widetilde{u}(\xi)), \tag{10}$$

где для $u(x) \in L_1(\mathbb{R}^N)$

$$\widetilde{u}(\xi) \equiv F(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}u(x)dx \; — \tag{11}$$

преобразование Фурье от функции $u(x)$, которое распространено на $L_2(\mathbb{R}^N)$, $F^{-1}\widetilde{u}(\xi)$ — обратное преобразование Фурье от функции $\widetilde{u}(\xi)$. Так как $u(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, а функция $\widetilde{m}(\xi)$ ограничена, то оператор M корректно определен, и при этом функция $\widetilde{m}(\xi)$ называется мультипликатором Фурье. Пусть множество переменных $(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \xi$ разбито на r групп длины N_i, $i = \overline{1, r}$, так что

$$N_1 + \cdots + N_r = N,$$

$$\xi = (y_1, \ldots, y_r), \qquad y_1 = (\xi_1, \ldots, \xi_{N_1}), \ldots, y_r = (\xi_{N_1+\cdots+N_{r-1}+1}, \ldots, \xi_N).$$

Пусть далее ω_i, $i = \overline{1, r}$, означают мультииндексы длины N_i

$$\omega_1 = (\omega_{1,1}, \ldots, \omega_{1,N_1}), \ldots, \omega_r = (\omega_{r,1}, \ldots, \omega_{r,N_r}), \qquad \omega_{i,k} \in \mathbf{N} \bigcup \{0\},$$

а символ $D_{y_i}^{\omega_i}\widetilde{u}(\xi)$ означает некоторую производную от функции $\widetilde{u}(\xi)$ порядка $|\omega_i| = \omega_{i,1} + \cdots + \omega_{i,N_i}$ по группе переменных $y_i = (\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_{N_i}})$, т. е. $D_{y_i}^{\omega_i}\widetilde{u}(\xi) = D_{\xi_{k_1}}^{\omega_{i,1}} \cdots D_{\xi_{k_{N_i}}}^{\omega_{i,N_i}}\widetilde{u}(\xi)$. Обозначим для $\nu > 0$

$$B_\nu = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \nu \leqslant |\xi| \leqslant \nu^{-1}\}.$$

Пусть функция $\widetilde{m}(\xi) \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ и ограничена. Пусть $x \in \mathbb{R}^N$, $K \in (0, N)$ — целое число, $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$, $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_K)$, $x^{(2)} = (x_{K+1}, \ldots, x_N)$ и аналогично $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$, $\xi^{(1)} = (\xi_1, \ldots, \xi_K)$, $\xi^{(2)} = (\xi_{K+1}, \ldots, \xi_N)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$, $\beta = (\beta_{K+1}, \ldots, \beta_N)$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $\beta_k > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$.

Для $x \in \mathbb{R}^N$ и целого $j \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$A_j x \equiv \left(2^{j/\alpha_1}x_1, \ldots, 2^{j/\alpha_K}x_K, 2^{j/\beta_{K+1}}x_{K+1}, 2^{j/\beta_N}x_N\right), \qquad a_j = \det A_j. \tag{12}$$

Обозначим $\widetilde{m}_j(\xi) = \widetilde{m}(\xi)\chi(A_j^{-1}\xi)$, $m_j(x)$ — обратное преобразование Фурье от функции $\widetilde{m}_j(\xi)$,

$$n_j(x) = a_j^{-1} m_j(A_j^{-1}x). \tag{13}$$

Пусть с некоторым $\mu > 0$ выполнены условия

$$\widetilde{m}(\xi)|_{\xi^{(1)}=0} = \widetilde{m}(0, \xi^{(2)}) \equiv 0, \qquad \xi^{(2)} \in \mathbb{R}^{N-K}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \sum_{k=1}^{K} |x_k|^{\alpha_k\gamma}\right)|n_j(x)|\, dx \leqslant \mu, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Пусть, наконец, задана финитная функция $u(x) \in C_{x^{(1)}}^{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^N)$, т. е. $u(x)$ имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условиям Гельдера по части переменных

$$\langle u\rangle_{x^{(1)},\mathbb{R}^N}^{(\alpha\gamma)} = \sum_{k=1}^{K}\langle u\rangle_{x_k,\mathbb{R}^N}^{(\alpha_k\gamma)} < \infty.$$

Обозначим

$$v(x) \equiv Mu \equiv m(x) * u(x) \equiv F^{-1}(\widetilde{m}(\xi)\widetilde{u}(\xi)).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (14), (15). *Тогда функция* $v(x)$ *удовлетворяет условию Гельдера по всем переменным, причем*

$$\langle v\rangle_{x^{(1)},x^{(2)},\mathbb{R}^N}^{(\alpha\gamma,\beta\gamma)} \leqslant C\mu\langle u\rangle_{x^{(1)},\mathbb{R}^N}^{(\alpha\gamma)}, \tag{16}$$

где

$$\langle v\rangle_{x^{(1)},x^{(2)},\mathbb{R}^N}^{(\alpha\gamma,\beta\gamma)} = \sum_{k=1}^{K}\langle v\rangle_{x_k,\mathbb{R}^N}^{(\alpha_k\gamma)} + \sum_{k=K+1}^{N}\langle v\rangle_{x_k,\mathbb{R}^N}^{(\beta_k\gamma)}.$$

Справедливо также следующее утверждение. Обозначим

$$\mathcal{H}_{x^{(1)}}^{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^N) = C_{x^{(1)}}^{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^N) \bigcap L_2(\mathbb{R}^N), \qquad \mathcal{H}_{x^{(1)},x^{(2)}}^{\alpha\gamma,\beta\gamma}(\mathbb{R}^N) = C_{x^{(1)},x^{(2)}}^{\alpha\gamma}(\mathbb{R}^N) \bigcap L_2(\mathbb{R}^N) \ —$$

замыкания множества финитных функций в нормах

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha\gamma}_{x^{(1)}}(\mathbb{R}^N)} \equiv \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} + \langle u\rangle^{(\alpha\gamma)}_{x^{(1)},\mathbb{R}^N}, \qquad \|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha\gamma,\beta\gamma}_{x^{(1)},x^{(2)}}(\mathbb{R}^N)} \equiv \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} + \langle u\rangle^{(\alpha\gamma,\beta\gamma)}_{x^{(1)},x^{(2)},\mathbb{R}^N}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (14). *Пусть далее выполнено условие*

$$s_i > \frac{N_i}{p} + \gamma, \qquad i = \overline{1,r}, \qquad p \in (1,2]. \tag{17}$$

Пусть еще выполнено условие

$$\sup_{\lambda>0} \sum_{|\omega_i|\leqslant s_i} \|D^{\omega_1}_{y_1} D^{\omega_2}_{y_2} \cdots D^{\omega_r}_{y_r} \widetilde{m}(A_\lambda\xi)\|_{L_p(B_\nu)} \leqslant \mu. \tag{18}$$

Тогда оператор M является ограниченным линейным оператором из $\mathcal{H}^{\alpha\gamma}_{x^{(1)}}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{H}^{\alpha\gamma,\beta\gamma}_{x^{(1)},x^{(2)}}(\mathbb{R}^N)$, причем

$$\|Mu\|_{H^{\alpha\gamma,\beta\gamma}_{x^{(1)},x^{(2)}}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\mu\|u\|_{H^{\alpha\gamma}_{x^{(1)}}(\mathbb{R}^N)}. \tag{19}$$

Приведем применение доказанных результатов к линеаризованному уравнению Кана–Хилларда с двумя типами динамических граничных условий.

Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$ класса $C^{4+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$, $T > 0$, $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$. В области Ω_T рассмотрим следующую начально-краевую задачу для неизвестной функции $u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u + \sum_{|\alpha|\leqslant 3} b_\alpha(x,t) D^\alpha_x u = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial \Delta u}{\partial \overline{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = g(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{21}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad t = 0, x \in \overline{\Omega}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\Delta_\Gamma u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u = h_1(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T. \tag{23}$$

Здесь $\overline{n}$ — внешняя нормаль к поверхности Γ, Δ_Γ — оператор Лапласа–Бельтрами на поверхности Γ, $b_\alpha(x,t)$, $a(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $u_0(x)$, $h_1(x,t)$ — заданные функции, причем $a(x,t) \geqslant \nu > 0$ и

$$\begin{aligned} &b_\alpha \in C^{\gamma,\gamma/4}(\overline{\Omega_T}), \qquad a, b_i, c \in C^{2+\gamma,(2+\gamma)/4}(\Gamma_T), \qquad f \in C^{\gamma,\gamma/4}(\overline{\Omega_T}), \\ &g \in C^{1+\gamma,(1+\gamma)/4}(\Gamma_T), \qquad h_1 \in C^{2+\gamma,(2+\gamma)/4}(\Gamma_T). \end{aligned} \tag{24}$$

Вместо динамического условия (23) на границе мы будем рассматривать также условие

$$\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,t)\frac{\partial u}{\partial \overline{n}} + b(x,t)u = h_2(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{25}$$

где заданные функции $d(x,t)$, $b(x,t)$, $h_2(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$d(x,t), b(x,t), h_2(x,t) \in C^{3+\gamma,(3+\gamma)/4}(\Gamma_T), \qquad d(x,t) \geqslant \nu > 0. \tag{26}$$

Мы предполагаем также выполненными условия согласования на данные задачи до первого порядка включительно при $t = 0$, $x \in \partial\Omega$. А именно, мы предполагаем, во-первых, что

$$\left.\frac{\partial \Delta u_0(x)}{\partial \overline{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = g(x,0), \qquad x \in \Gamma. \tag{27}$$

Кроме того, в случае граничного условия (23) предполагается, что при $x \in \Gamma$

$$\Delta^2 u_0(x) + \sum_{|\alpha|\leqslant 3} b_\alpha(x,0) D_x^\alpha u_0 - f(x,0) =$$

$$= -a(x,0)\Delta_\Gamma u_0 + \sum_{i=1}^N b_i(x,0)\frac{\partial u_0}{\partial x_i} + c(x,0)u_0 - h_1(x,0), \tag{28}$$

а в случае условия (25) мы предполагаем, что при $x \in \Gamma$

$$\Delta^2 u_0(x) + \sum_{|\alpha|\leqslant 3} b_\alpha(x,0) D_x^\alpha u_0 - f(x,0) = d(x,0)\frac{\partial u_0}{\partial \overline{n}} + b(x,0)u_0 - h_2(x,0). \tag{29}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. *При выполнении условий* (24), (27), (28) *задача* (20)–(23) *имеет единственное решение из класса* $C^{4+\gamma,(4+\gamma)/4}(\overline{\Omega_T})$ *такое, что* $u_t|_{\Gamma_T} \in C^{2+\gamma,(2+\gamma)/4}(\Gamma_T)$, *для которого справедлива оценка*

$$|u|^{(4+\gamma)}_{\Omega_T} + \left|\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Gamma_T}\right|^{(2+\gamma)}_{\Gamma_T} \leqslant C_1(|f|^{(\gamma)}_{\Omega_T} + |g|^{(1+\gamma)}_{\Gamma_T} + |h_1|^{(2+\gamma)}_{\Gamma_T}), \tag{30}$$

где константа C_1 *зависит только от* T, ν, *и норм коэффициентов* $b_\alpha(x,t)$, $a(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ *в соответствующих пространствах.*

Теорема 4. *При выполнении условий* (24), (26), (27), (29) *задача* (20)–(22), (25) *имеет единственное решение из класса* $C^{4+\gamma,(4+\gamma)/4}(\overline{\Omega_T})$ *такое, что* $u_t|_{\Gamma_T} \in C^{3+\gamma,(3+\gamma)4}(\Gamma_T)$, *для которого справедлива оценка*

$$|u|^{(4+\gamma)}_{\Omega_T} + \left|\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Gamma_T}\right|^{(3+\gamma)}_{\Gamma_T} \leqslant C_2(|f|^{(\gamma)}_{\Omega_T} + |g|^{(1+\gamma)}_{\Gamma_T} + |h_2|^{(3+\gamma)}_{\Gamma_T}), \tag{31}$$

где константа C_2 *зависит только от* T, ν, *и норм коэффициентов* $b_\alpha(x,t)$, $d(x,t)$, $b(x,t)$ *в соответствующих пространствах.*

1. *Ладыженская О. А.* Теорема о мультипликаторах в неоднородных пространствах Гельдера и некоторые ее приложения // Зап. науч. семинаров Ст.-Петербург. отд. Мат. ин-та АН. – 2000. – **271**. – С. 156–174.
2. *Ladyzhenskaya O. A.* On multiplicators in Hölder spaces with nonhomogeneous metric // Methods. Appl. Anal. – 2000. – **7**, No 3. – P. 465–472.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 05.12.2013

С. П. Дегтярьов

Мультиплікатори Фур'є в просторах з частковою властивістю Гельдера та їх застосування до оцінок Шаудера

Наведено порівняно прості достатні умови на мультиплікатор Фур'є для того, щоб він відображав функції, які задовольняють умову Гельдера за частиною змінних у функції, яка задовольняє умову Гельдера за всіма змінними. З використанням цих достатніх умов доведено розв'язність у класах Гельдера початково-крайових задач для лінеаризованого рівняння Кана–Хілларда з динамічними граничними умовами двох типів. Одержано оцінки Шаудера розв'язків вказаних задач.

S. P. Degtyarev

Fourier multipliers in the spaces with partial Hölder property and their application to the Schauder estimates

We give relatively simple sufficient conditions for a Fourier multiplier in order that it maps functions with the Hölder property in a part of the variables into functions with the Hölder property in all variables. With the use of these sufficient conditions, we prove the solvability in Hölder classes of the initial-boundary-value problems for a linearized Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions of two types. For the solutions of these problems, the Schauder estimates are obtained.