

Об устойчивости траекторий множества разностных уравнений

Для множества разностных уравнений, генерируемых дискретизацией множества дифференциальных уравнений с производной Хукухары, установлен принцип сравнения с матричной функцией Ляпунова и достаточные условия устойчивости определенного типа. Анализ проведен на основе матричной функции Ляпунова специальной структуры.

Далее понадобятся следующие понятия и результаты (см. [1] и библиографию там). Пусть $K_C(\mathbb{R}^q)$ обозначает семейство всех непустых, компактных и выпуклых подмножеств в пространстве $\mathbb{R}^q$; $K(\mathbb{R}^q)$ содержит все непустые компактные подмножества в $\mathbb{R}^q$ и $C(\mathbb{R}^q)$ — подмножество всех непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^q$. Расстояние между непустыми замкнутыми подмножествами A и B пространства $\mathbb{R}^q$ определяется формулой

$$D[A, B] = \max\{d_H(A, B), d_H(B, A)\},$$

где $d_H(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}$ — хаусдорфово разделение множеств A и B и $d(b, A) = \inf\{\|b - a\| : a \in A\}$ — расстояние от точки b до множества A ; $\|\cdot\|$ — евклидова метрика.

Пара $(C(\mathbb{R}^q), D)$ является полным сепарабельным метрическим пространством, в котором $K(\mathbb{R}^q)$ и $K_C(\mathbb{R}^q)$ — замкнутые подмножества.

Пусть F — отображение области Q пространства $\mathbb{R}^q$ в метрическое пространство $(K_C(\mathbb{R}^q), D)$, т.е. $F: Q \rightarrow K_C(\mathbb{R}^q)$, что эквивалентно включению $F(t) \in K_C(\mathbb{R}^q)$ при всех $t \in Q$. Такие отображения называются многозначными отображениями Q в $\mathbb{R}^q$.

Пусть $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел и $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим через $\mathbb{N}_{n_0}$ множество

$$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + k, \dots\},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $n_0 \in \mathbb{N}_+$.

Напомним один результат из теории классических разностных уравнений, который понадобится ниже.

Теорема 1 (см. [2]). Пусть $n \in \mathbb{N}_+$ и для любых $r \geq 0$ функция $g(n, r)$, $g: \mathbb{N}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, неубывающая по r при каждом значении n . Если при любом $n \geq n_0$ выполняются неравенства $y_n \geq 0$ и

$$y_{n+1} \leq g(n, y_n),$$

$$z_{n+1} \geq g(n, z_n),$$

то $y_n \leq z_n$ при всех $n \geq n_0$, как только $y_{n_0} \leq z_{n_0}$.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 функция $g(n, r)$ имеет вид $g(n, r) = r + w(n, r)$, где $\lim_{\|r\| \rightarrow 0} \frac{\|w(n, r)\|}{\|r\|} = 0$ при $\|r\| \rightarrow 0$, то утверждение теоремы 1 сохраняется.

Постановка задачи. Рассмотрим множество разностных уравнений в форме

$$X_{n+1} = F(n, X_n, \alpha), \quad X_{n_0} = X_0, \quad (1)$$

где отображение $F: \mathbb{N}_+ \times K_C(\mathbb{R}^q) \rightarrow K_C(\mathbb{R}^q)$ является непрерывным по X_n при каждом n и $X_n \in K_C(\mathbb{R}^q)$ при всех $n \geq n_0$, $\alpha \in \mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^d$ — параметр неточности.

Наряду с системой (1) будем рассматривать следующие множества разностных уравнений:

$$X_{n+1} = F_M(n, X_n), \quad X_{n_0} = X_0, \quad (2)$$

где $F_M(n, X_n) = \overline{\text{co}} \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{Z}} F(n, X_n, \alpha)$;

$$X_{n+1} = F_m(n, X_n), \quad X_{n_0} = X_0, \quad (3)$$

где $F_m(n, X_n) = \overline{\text{co}} \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{Z}} F(n, X_n, \alpha)$;

$$X_{n+1} = F_\beta(n, X_n), \quad X_{n_0} = X_0, \quad (4)$$

где $F_\beta(n, X_n) = F_M(n, X_n)\beta + F_m(n, X_n)(1 - \beta)$, $\beta \in [0, 1]$.

Заметим, что произведение скаляра β на множество A определяется формулой $C = \beta A = \{c = \beta a: a \in A\}$.

Здесь и далее предполагается, что F_m , F_M и $F_\beta \in K_c(\mathbb{R}^q)$ и символ $\overline{\text{co}}$ обозначает замыкание выпуклой оболочки соответствующего множества. Необходимо получить условия устойчивости стационарного решения $\Theta \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества систем разностных уравнений (1) на основе функции Ляпунова, построенной для уравнений (2)–(4).

Структура матричной вспомогательной функции. Введем вспомогательную функцию

$$U(n, \beta, X_n) = [U_{ij}(n, \beta, X_n)], \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

где элемент $U_{11}(n, X_n)$ связан с множеством уравнений (2), элемент $U_{22}(n, X_n)$ связан с множеством уравнений (3), элемент $U_{12}(n, \beta, X_n) = U_{21}(n, \beta, X_n)$ связан с множеством уравнений (4).

На основе функции (5) построим скалярную функцию

$$V(n, X_n, \beta, \theta) = \theta^T U(n, \beta, X_n) \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\} \quad (6)$$

и предположим, что $V: \mathbb{N}_+ \times K_C(\mathbb{R}^q) \times [0, 1] \times \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Функция (6) является функцией Ляпунова для множества уравнений (1), если вместе с первой разностью

$$\Delta V(n, X_n, \beta, \theta) = V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) - V(n, X_n, \beta, \theta) \quad (7)$$

с ее помощью может быть решен вопрос об устойчивости стационарного решения $\Theta \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества уравнений (1).

Наряду с множеством разностных уравнений (1) будем рассматривать скалярное уравнение сравнения

$$u_{n+1} = g(n, u_n), \quad u_{n_0} = u_0, \quad (8)$$

которое связано с функцией (6) и первой разностью (7). Здесь функция $g(n, r)$ — непрерывная и неубывающая по r при каждом значении $n \in \mathbb{N}_+$ функция, $g(n, 0) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

Теорема 2. Пусть для множества уравнений (1) построена функция (6) и для первой разности (7) верна оценка

$$\Delta V(n, X_n, \beta, \theta)|_{(1)} \leq w(n, V(n, X_n, \beta, \theta)), \quad (9)$$

где $w(n, r)$ удовлетворяет условию следствия 1 при всех $n \in \mathbb{N}_+$. Тогда, если $V(n_0, X_{n_0}, \beta, \theta) \leq u_{n_0}$, то $V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leq u_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

Доказательство. Обозначим $u_{n+1} = V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta)$. По условию теоремы 2, $V(n_0, X_{n_0}, \beta, \theta) \leq u_{n_0}$ и, кроме того,

$$u_{n+1} \leq u_n + w(n, u_n) \quad \text{при всех} \quad n \geq n_0.$$

Следовательно, в уравнении сравнения (8) $g(n, r) = r + w(n, r)$ и, согласно следствию 1, имеем оценку $V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leq u_{n+1}$ при всех $n \geq n_0$. Этим теорема 2 доказана.

Достаточные условия устойчивости стационарного решения уравнений (1).

Напомним, что для множеств $X_0, Y_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множество $W_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ называется разностью Хукухары, если $X_0 = Y_0 + W_0$. Для множества уравнений (1) введем такие предположения:

1. Для уравнений (1) существует множество стационарных решений $\Theta_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$, т. е. $F(n, \Theta_0) = \Theta_0$ при всех $n \in \mathbb{N}_+$.

2. Существует множество $Y_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ такое, что для любого $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ существует разность Хукухары W_0 .

Определение 1. Стационарное решение Θ_0 множества уравнений (1) является:

а) устойчивым, если для $n_0 \in \mathbb{N}_+$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $D[W_0, \Theta_0] < \delta$ следует оценка $D[X(n), \Theta_0] < \varepsilon$ при всех $n \geq n_0$, где W_0 — разность Хукухары для начальных значений $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$;

б) притягивающим, если для $n_0 \in \mathbb{N}_+$ существует $\alpha(n_0) > 0$ и для любого $\xi > 0$ существует $\tau(n_0, W_0, \xi) \in \mathbb{N}_+$ такое, что из неравенства $D[W_0, \Theta_0] < \alpha(n_0)$ следует оценка $D[X(n), \Theta_0] < \xi$ при любом $n \geq n_0 + \tau(n_0, W_0, \xi)$;

в) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающее одновременно.

Для множества разностных уравнений (1) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Предположим, что для множества разностных уравнений (1) существуют

а) функция (6), постоянные симметрические (2×2) -матрицы $A(\theta)$, $B(\theta)$ и векторные функции сравнения $(\phi_1, \phi_2) \in KR$ -классу Хана такие, что

$$\begin{aligned} \phi_1^T(\|X_n\|)A(\theta)\phi_1(\|X_n\|) &\leq V(n, X_n, \beta, \theta) \leq \phi_2^T(\|X_n\|)B(\theta)\phi_2(\|X_n\|) \\ \text{при всех} \quad \beta &\in [0, 1], \quad X_n \in K_C(\mathbb{R}^q) \quad \text{и} \quad \theta \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}; \end{aligned} \quad (10)$$

б) функция $w(n, r)$, указанная в следствии 1, и выполняется оценка (9) при всех $\beta \in [0, 1]$ и всех $n \in \mathbb{N}_+$.

Тогда, если матрицы $A(\theta)$ и $B(\theta)$ определены положительно, то стационарное решение $\Theta_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ множества разностных уравнений (1) обладает теми же динамическими свойствами, что и нулевое решение уравнения сравнения (8).

Доказательство. Пусть $\lambda_m(A)$ и $\lambda_M(B)$ — минимальное и максимальное собственные значения матриц A и B соответственно. Оценку (10) преобразуем к виду

$$\lambda_m(A)b(\|X_n\|) \leq V(n, X_n, \beta, \theta) \leq \lambda_M(B)a(\|X_n\|),$$

где $a, b \in KR$ -классу Хана такие, что

$$\phi_1^T(\|X_n\|)\phi_1(\|X_n\|) \geq b(\|X_n\|) \quad \text{и} \quad \phi_2^T(\|X_n\|)\phi_2(\|X_n\|) \leq a(\|X_n\|)$$

при всех $X_n \in K_C(\mathbb{R}^q)$ и $n \in \mathbb{N}_+$.

Далее предположим, что нулевое решение уравнения сравнения (8) асимптотически устойчиво. Пусть заданы $n_0 \in \mathbb{N}_+$ и $\varepsilon \in (0, H)$, $H = \text{const} > 0$. При этом для величин $\lambda_m(A)b(\varepsilon) > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}_+$ найдется $\delta_1 = \delta_1(n_0, \varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < u_{n_0} < \delta_1$, то $u_{n+1} < \lambda_m(A)b(\varepsilon)$ при всех $n \geq n_0$. Далее выберем величину $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$ из условия $\lambda_M(B)a(\delta) < \delta_1(n_0, \varepsilon)$. Согласно теореме 2, имеем оценку

$$V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leq u_{n+1} \quad \text{при всех} \quad n \geq n_0$$

и вследствие неравенства (11) получим

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leq V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leq u_{n+1} \quad \text{при всех} \quad n \geq n_0.$$

Пусть начальные значения $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ и $D[X_0, \Theta_0] < \delta$. Выберем $u_{n_0} = V(n_0, X_0, \beta, \theta)$. Тогда нетрудно видеть, что

$$u_{n_0} \leq \lambda_M(B)a(D[X_0, \Theta_0]) \leq \lambda_M(B)a(\delta) < \delta_1.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leq \lambda_m(A)b(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad n \geq n_0,$$

и, следовательно, $D[X_{n+1}, \Theta_0] < \varepsilon$ при всех $n \geq n_0$. Далее из оценки

$$\lambda_m(A)b(D[X_{n+1}, \Theta_0]) \leq V(n+1, X_{n+1}, \beta, \theta) \leq u_{n+1} \quad \text{при} \quad n \geq n_0$$

следует, что для начальных условий $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^q)$ имеет место $D[X_{n+1}, \Theta_0] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, как только $u_{n+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Это завершает доказательство теоремы 3.

Заключительные замечания. Разностные уравнения имеют широкое применение в теории вероятностей, теории массового обслуживания, в теории стохастических степенных рядов, теории чисел, теории электрических сетей, экономике, экологии и при исследовании других явлений реального мира. В то время как общая теория устойчивости классических разностных уравнений развита достаточно полно (см. [3, 4] и библиографию там), теория множества разностных уравнений находится на начальной стадии создания. В данной работе излагается один общий подход к проблеме анализа устойчивости множества траекторий разностных уравнений на основе обобщенного прямого метода Ляпунова.

В тех случаях, когда для уравнения сравнения (8) условия устойчивости могут быть получены в явном виде, теоремой 3 эффективно решается вопрос об устойчивости стационарного решения Θ_0 множества разностных уравнений (1).

1. Bhaskar T. G., Shaw M. Stability results for set difference equations // Dynamic Systems and Applications. – 2004. – **13**, No 3/4. – P. 479–485.
2. Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A. Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
3. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. – Санкт-Петербург: СПб гос. ун-т, 2003. – 111 с.
4. Martynyuk A. A. Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2007. – 322 p.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 10.09.2013

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

Про стійкість траєкторій множини різницевих рівнянь

Для множини різницевих рівнянь, які генеруються дискретизацією множини диференціальних рівнянь із похідною Хукухари, встановлено принцип порівняння з матричною функцією Ляпунова, а також достатні умови стійкості множини траєкторій. Аналіз проведено на основі матричної функції Ляпунова спеціальної структури.

Academician of the NAS of Ukrain **A. A. Martynyuk**

On the stability of trajectories of a set of difference equations

For a set of difference equations generated by the discretization of a set of differential equations with a Hukuhara derivative, the comparison principle with a Lyapunov matrix function and the sufficient conditions for the stability of a set of trajectories are established. The analysis is carried out on the basis of the Lyapunov matrix function with a special structure.