УДК 532.528

Академик НАН Украины **В. Д. Кубенко**

Нестационарная нагрузка на поверхности упругого полупространства

Рассматривается осесимметричная задача определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, на границе которого действует нестационарное нормальное напряжение. Решение задачи строится с применением интегральных преобразований Лапласа и Бесселя. Выполнено совместное обращение интегральных преобразований. Как результат, получено точное решение задачи и определено напряжение и перемещение вдоль оси симметрии задачи. Приведен пример числовых расчетов.

Формулировка задачи. Рассматривается упругое полупространство, к поверхности которого приложена нестационарния нагрузка. Имеет место осевая симметрия задачи, поэтому полупространство отнесено к цилиндрической системе координат Orz, выбранной таким образом, что ось Oz, являющаяся осью симметрии, направлена вглубь полупространства, ось Or — вдоль его поверхности (рис. 1).

Нестационарная нагрузка в виде нормального напряжения возникает в некоторый начальный момент времени $t = 0$ и в общем случае является функцией времени и координаты r. Физические свойства материала среды описываются при помощи упругих постоянных — модуля всестороннего сжатия K, модуля сдвига μ и плотности γ. Введем в рассмотрение также некоторую "акустическую" среду с параметрами E, γ и $\mu = 0$, где E — модуль Юнга. Через c_0 обозначим скорость звука в акустической среде. Таким образом, скорости распространения волн определяются формулами $c_p = ((K + 4/3\mu)/\gamma)^{1/2}$; $c_s = (\mu/\gamma)^{1/2}$; $c_0 = (E/\gamma)^{1/2}$.

Вводятся безразмерные переменные и обозначения:

$$\begin{aligned} &\overline{r} = \frac{r}{R}, \qquad \overline{z} = \frac{z}{R}, \qquad \overline{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E} \qquad (i, j = r, z), \qquad \overline{u}_i = \frac{u_i}{R}, \\ &\overline{t} = \frac{c_0 t}{R}, \qquad \beta = \frac{c_s}{c_0}, \qquad \alpha = \frac{c_p}{c_0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь R — некоторый характерный линейный размер; u_i — проекции вектора упругих перемещений; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Ниже (если не будет оговорено иное) будут использоваться только безразмерные обозначения, поэтому черту над ними опускаем.

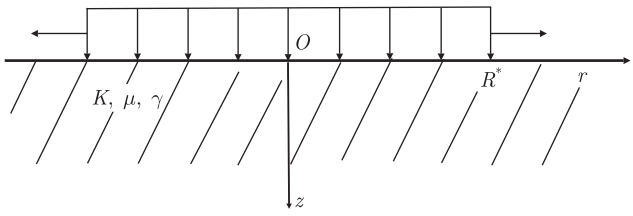

Рис. 1. Система координат

© В. Д. Кубенко, 2014

Движение упругой среды в осесимметричном случае описывается двумя скалярными волновыми потенциалами Φ и Ψ, удовлетворяющими уравнениям [2]

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}; \qquad \Delta\Psi = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}; \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2}$$

Физические величины (перемещения, напряжения) выражаются через потенциалы Φ и Ψ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}; \qquad u_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r};\\
&\sigma_{zz} = \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial z}\right);\\
&\sigma_{rr} = \left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3\Psi}{\partial r^2\partial z}\right);\\
&\sigma_{rz} = 2\beta^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right).
\end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности $z = 0$ состоят в задании нормального напряжения σ_{zz} и отсутствии касательного напряжения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(t, r),\\
&\sigma_{zr}|_{z=0} = 0, \qquad r \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $Q(t, r)$ — заданная функция. Начальные условия для потенциалов Φ и Ψ являются нулевыми

$$\Phi|_{t=0} = \dot{\Phi}|_{t=0} = \Psi|_{t=0} = \dot{\Psi}|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

на бесконечности волновые возмущения затухают.

Общее решение. Решение задачи (1)–(4) получим при помощи интегральных преобразований Лапласа по времени t с параметром s и преобразования Бесселя (Ханкеля) порядка 0 по r с параметром ξ [6]. В частности,

$$\begin{aligned}
&f^L(s) = L\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt; \qquad f(t) = L^{-1}\{f^L(s)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{ts} f^L(p)\, dp;\\
&f^B(\xi) = B\{f(r)\} = \int\limits_0^\infty f(r) r J_0(r\xi)\, d\xi; \qquad f(r) = B^{-1}\{f^B(\xi)\} = \int\limits_0^\infty f^B(\xi)\xi J_0(r\xi)\, d\xi.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь через L и B, соответственно, обозначены операторы интегральных преобразований Лапласа и Бесселя; L^{-1}, B^{-1} — операторы обращения, изображение функции обозначается соответствующим верхним индексом; J_m — цилиндрическая функция Бесселя индекса m [3].

В пространстве изображений по Лапласу и Бесселю получим следующую граничную задачу (в которой начальные условия уже реализованы):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi^{LB}}{\partial z^2}-\left(\frac{s^2}{\alpha^2}+\xi^2\right)\Phi^{LB}=0,\\
&\frac{\partial^2\Psi^{LB}}{\partial z^2}-\left(\frac{s^2}{\beta^2}+\xi^2\right)\Psi^{LB}=0,\\
&\left(1-2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)s^2\Phi^{LB}+2\beta^2\left[\frac{\partial^2\Phi^{LB}}{\partial z^2}+\xi^2\frac{\partial}{\partial z}\Psi^{LB}\right]=Q^{LB}(s,\xi), \qquad z=0,\\
&\frac{\partial\Phi^{LB}}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi^{LB}}{\partial z^2}-\frac{s^2}{2\beta^2}\Psi^{LB}=0, \qquad z=0,\\
&\Phi^{LB}\to 0, \qquad \Psi^{LB}\to 0, \qquad z\to\infty.
\end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение волновых уравнений, затухающее при $z\to\infty$, имеет вид

$$\Phi^{LB}=Ae^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}; \qquad \Psi^{LB}=Be^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}. \tag{7}$$

Определяя произвольные постоянные A, B из граничных условий, будем иметь выражение для изображения нормального напряжения

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{LB}(s,\xi,z)&=Q^{LB}(s,\xi)\times\\
&\times\frac{(s^2+2\beta^2\xi^2)^2e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}-4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}}{(s^2+2\beta^2\xi^2)^2-4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Перемещение u_z и напряжение сдвига σ_{rz} в изображениях имеют вид

$$u_z^{LB}=-Q^{LB}(s,\xi)\frac{\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\left[(s^2+2\beta^2\xi^2)e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}-2\beta^2\xi^2e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}\right]}{(2\beta^2\xi^2+s^2)^2-4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\,\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}, \tag{9}$$

$$\sigma_{rz}^{LB}=-Q^{LB}(s,\xi)\frac{\dfrac{1}{\alpha}(s^2+2\beta^2\xi^2)\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\left(e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}}-e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}\right)}{(2\beta^2\xi^2+s^2)^2-4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}. \tag{10}$$

Обращение интегральных преобразований. Обратим внимание на то обстоятельство, что дробь в выражениях (8)–(10) является однородной функцией параметров преобразований s и ξ. Это позволяет надеяться, что для некоторых внешних воздействий, которые задают функцию $Q^{LB}(s,\xi)$, можно получить аналитическое выражение для σ_{zz}, σ_{rz}^{LB}, u_z^{LB} на основе метода Каньяра [4, 5] совместного обращения интегральных преобразований.

Методика обращения зависит от свойств функции $Q(r,t)$, поэтому ее необходимо конкретизовать. В рамках данной публикации ограничимся нагрузкой следующего вида:

$$Q(t,x)=Q_0H(kt-r), \tag{11}$$

где $H(t)$ — единичная функция Хевисайда: $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Функция (11) задает внезапно возникающее и распространяющееся с постоянной скоростью по поверхности полупространства напряжение.

Нетрудно определить преобразование Лапласа и Бесселя этой функции

$$Q_{zz}^{L}(r,s) = Q_0 \frac{1}{s} e^{-s\frac{r}{k}}; \qquad Q_{zz}^{LB}(s,\xi) = Q_0 \frac{k^2}{(s^2+\xi^2 k^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{12}$$

Тогда, например, из (8) получим

$$\sigma_{zz}^{LB}(s,\xi,z) = Q_0 \frac{k^2}{(s^2+\xi^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \frac{(s^2+2\beta^2\xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}} - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}}{(s^2+2\beta^2\xi^2)^2 - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}.$$

Запишем инверсию преобразования Бесселя на оси z, т. е. при $r = 0$

$$\sigma_{zz}^{L}(s,z) = Q_0 \int_0^\infty \frac{k^2}{(s^2+\xi^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \frac{\left[(s^2+2\beta^2\xi^2)^2 e^{-\frac{z}{\alpha}\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}} - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}e^{-\frac{z}{\beta}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}\right]}{(s^2+2\beta^2\xi^2)^2 - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\xi^2\sqrt{s^2+\alpha^2\xi^2}\sqrt{s^2+\beta^2\xi^2}}\xi d\xi$$

и сделаем замену переменного $\xi = s\eta$, $d\xi = sd\eta$, предполагая s вещественным. Будем иметь

$$\sigma_{zz}^{L}(s,z) = Q_0 \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{k^2}{(1+\eta^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \frac{\left[(1+2\beta^2\eta^2)^2 e^{-s\frac{z}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}} - 4\frac{\beta^3}{\alpha}\eta^2\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}e^{-s\frac{z}{\beta}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}\right]}{(1+2\beta^2\eta^2)^2 - 4\frac{\beta^3}{\alpha}\eta^2\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}\eta d\eta. \tag{13}$$

Перепишем (13) в виде суммы двух интегралов

$$\sigma_{zz}^{L}(s,z) = Q_0\frac{1}{s}[R_1^L(z,s) + R_2^L(z,s)] = Q_0\frac{1}{s}\left[\int_0^\infty \overline{R}_1^L(s,z,\eta)d\eta + \int_0^\infty \overline{R}_2^L(s,z,\eta)d\eta\right],$$

$$\overline{R}_1^L(s,z,\eta) = e^{-s\frac{z}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}}\frac{k^2}{(1+\eta^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{(1+2\beta^2\eta^2)^2}{(1+2\beta^2\eta^2)^2 - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\eta^2\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}\eta, \tag{14}$$

$$\overline{R}_2^L(s,z,\eta) = -4\frac{\beta^3}{\alpha}e^{-s\frac{z}{\beta}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}\frac{k^2}{(1+\eta^2k^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\eta^2\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}{(1+2\beta^2\eta^2)^2 - 4\dfrac{\beta^3}{\alpha}\eta^2\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}}\eta.$$

В выражении (14) сделаем следующие замены переменного:

$$\text{для} \quad \overline{R}_1^L(s,z,\eta): \quad \frac{z}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2\eta^2}=t;$$

$$\text{для} \quad \overline{R}_2^L(s,z,\eta): \quad \frac{z}{\beta}\sqrt{1+\beta^2\eta^2}=t.$$

Тогда получим

$$R_1^L(s,z)=\int\limits_{\frac{z}{\alpha}}^{\infty} e^{-st}\overline{R}_{zz}^{(1)}(t,z)\,dt;$$

$$R_1(t,z)=\frac{\alpha^3k^2[\alpha^2z^2+2\beta^2A(t,z)]^2tz}{[\alpha^2z^2+k^2A(t,z)]^{\frac{3}{2}}([\alpha^2z^2+2\beta^2A(t,z)]^2-4\alpha\beta^3tA(t,z)\sqrt{\alpha^2z^2+\beta^2A(t,z)})},$$

$$R_2^L(s,z)=\int\limits_{\frac{z}{\beta}}^{\infty} e^{-st}\overline{R}_{zz}^{(2)}(t,z)\,dt; \tag{15}$$

$$R_2(z,t)=4\frac{\beta^4k^2}{\alpha}\frac{B(t,z)\sqrt{\beta^2z^2+\alpha^2B(t,z)}t^2z}{[\beta^2z^2+k^2B(t,z)]^{\frac{3}{2}}[(2\beta^2t^2-z^2)^2-4\dfrac{\beta}{\alpha}tB(t,z)\sqrt{\beta^2z^2+\alpha^2B(t,z)}]},$$

$$A(t,z)=\alpha^2t^2-z^2; \qquad B(t,z)=\beta^2t^2-z^2.$$

Интегральные операторы в (15) есть операторы преобразования Лапласа, следовательно, оригиналами $R_1^L(s,z)$ и $R_2^L(s,z)$ есть, соответственно, $H(t-z/\alpha)R_1(t,z)$ и $H(t-z/\beta)\times$ $\times\, R_2(z,t)$.

Окончательно, учитывая множитель $1/s$ в выражении (14), будем иметь следующее аналитическое выражение для нормального напряжения $\sigma_{zz}(t,z)$ на оси симметрии задачи:

$$\sigma_{zz}(t,z)=Q_0\left[H\left(t-\frac{z}{\alpha}\right)\int\limits_{\frac{z}{\alpha}}^{t}R_1(\tau,z)\,d\tau-H\left(t-\frac{z}{\beta}\right)\int\limits_{\frac{z}{\beta}}^{t}R_2(\tau,z)\,d\tau\right]. \tag{16}$$

Выражения для остальных напряжений и перемещений получаются аналогично.

Числовые результаты. Приведем некоторые числовые результаты, в частности, для напряжения σ_{zz}. При вычислениях были выбраны следующие значения параметров материала упругого полупространства: $\alpha = 1{,}28$, $\beta = 0{,}69$, кроме того, параметр нагрузки $Q_0 = 1$.

На рис. 2, *а*, *б* скорость расширения нагрузки такова, что $\overline{k} = k/\alpha = 1$.

На рис. 2, *а* представлено распределение напряжения вдоль оси z в фиксированные моменты времени:

1 — $t = 1{,}0$; *2* — $t = 5{,}0$; *3* — $t = 10{,}0$; *4* — $t = 15{,}0$.

Можно видеть, что напряжение, оставаясь равным единице на поверхности полупространства, с течением времени и с ростом расстояния от граничной поверхности изменяет

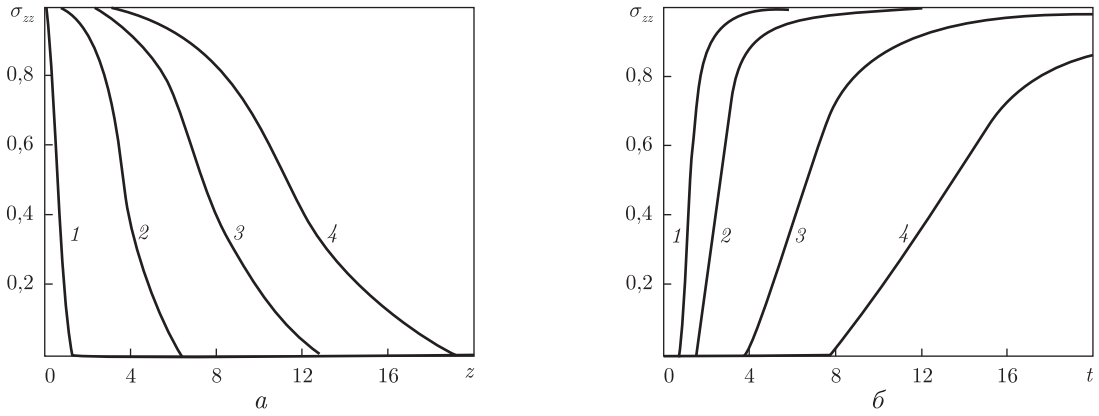

Рис. 2. Напряжение σ_{zz} при $k = 1$

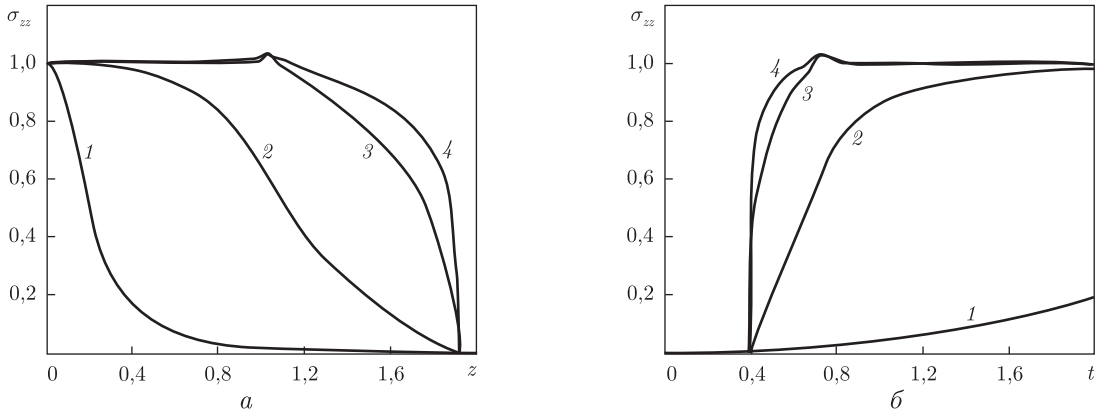

Рис. 3. Напряжение σ_{zz} при различных k

профиль таким образом, что его крутизна уменьшается. При этом увеличивается зона, в которой значение напряжения близко к значению на границе. Рис. 2, *б* иллюстрирует развитие напряжения во времени в нескольких точках оси z:

$$1 - z = 1{,}0; \qquad 2 - z = 2{,}0; \qquad 3 - z = 5{,}0; \qquad 4 - z = 10{,}0.$$

С ростом z нарастание напряжения в рассматриваемой точке становится все менее резким, а время достижения значения, близкого к значению на границе, увеличивается.

Рис. 3, *а*, *б* построены для нескольких значений безразмерного параметра k: $1 - k = 0{,}1$; $2 - k = 1{,}0$; $3 - k = 5{,}0$; $4 - k = 10{,}0$. При этом рис. 3, *а* показывает напряжение σ_{zz} как функцию z в момент времени $t = 1{,}5$, рис. 3, *б* — как функцию t в точке $z = 0{,}5$).

Как следует из графиков, характер изменения напряжения существенно зависит от скорости распространения нагрузки. С уменьшением параметра k градиент роста напряжения уменьшается. Наблюдаемый на рис. 3, *а*, *б* (кривые *3*, *4*) излом отвечает фронту порожденной сдвиговой волны и имеет место только при движении нагрузки по поверхности полупространства с опережением фронта волны расширения.

Укажем, что решение аналогичной плоской задачи изложено в работе [7].

1. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 220 с.

2. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, ГИФМЛ, 1969. – 344 с.
4. *Cagniard L.* Reflexion et Refraction des Ondes Seismiques Progressives. – Paris: Gauthier-Villars, 1939. – 255 p.
5. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 374 с.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – Москва: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
7. *Кубенко В. Д.* Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуплоскости // Доп. НАН України. – 2011. – № 10. – С. 67–71.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 25.11.2013

Академік НАН України **В. Д. Кубенко**

Нестаціонарне навантаження на поверхні пружного півпростору

Розглядається вісесиметрична задача визначення напруженого стану пружного півпростору, на границі якого діє нестаціонарне нормальне напруження. Розв'язок задачі будується із застосуванням інтегральних перетвореь Лапласа і Бесселя. Виконано спільне обернення інтегральних перетворень. Як результат, одержано точний розв'язок задачі і визначено напруження і переміщення вздовж осі симетрії задачі. Наведено приклад числового розрахунку.

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko**

Nonstationary loading at the elastic half-space surface

A nonstationary stress is applied to the surface of an elastic half-space. It is necessary to built a solution of the transient boundary problem and to determine the stress-strain state of the half-space. The solution is realized with help of the Laplace and Fourier integral transformations. The coupled inversion of the integral transforms is realized. As a result, the exact solution for a stress and a displacement along the axis of symmetry of the problem is determined. Numerical examples are given.