

## О регулярных решениях задачи Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Для невырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге доказано существование регулярных решений задачи Римана–Гильберта с коэффициентами ограниченной вариации и почти непрерывными граничными данными.

Обозначим через  $\mathbb{D}$  единичный круг в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и пусть  $\mu: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  — измеримая функция с  $|\mu(z)| < 1$  п. в. Уравнением Бельтрами с коэффициентом  $\mu$  называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \quad (1)$$

где  $f_{\bar{z}} = \bar{\partial}f = (f_x + if_y)/2$ ,  $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$ ,  $z = x + iy$ ,  $f_x$  и  $f_y$  — частные производные функции  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  по  $x$  и  $y$  соответственно. Уравнение (1) называется невырожденным, если  $\|\mu\|_\infty < 1$ .

В 1904 г. Д. Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Римана–Гильберта. Она состояла в доказательстве существования и нахождения аналитической функции  $f$  в области  $D \subset \mathbb{C}$ , ограниченной спрямляемой жордановой кривой  $K$  с условием

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) = \varphi(\zeta) \quad \forall \zeta \in K, \quad (2)$$

где им предполагалось, что функции  $\lambda$  и  $\varphi$  непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой  $K$  и что  $|\lambda| \neq 0$  на  $K$ . Поэтому можно считать, что  $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ .

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Д. Гильбертом в работе [1]. Другой способ решения задачи, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был предложен также Д. Гильбертом (см. [2]). О дальнейшей истории вопроса см., например, [3]. Мы следуем второй из упомянутых схем при решении обобщенной задачи Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в единичном круге.

**1. Определения и предварительные замечания.** Наиболее важным для нас является понятие логарифмической емкости (см., например, [4]). Пусть  $E$  — произвольное ограниченное борелевское множество плоскости  $\mathbb{C}$ . Положительным распределением массы на множестве  $E$  называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества  $\nu$ , определенную на борелевских подмножествах  $E$ , с  $\nu(E) = 1$ . Функцию

$$U^\nu(z) := \int_E \log \left| \frac{1}{z - \zeta} \right| d\nu(\zeta) \quad (3)$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения  $\nu$ . Соответственно, *логарифмической емкостью*  $C(E)$  множества  $E$  называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \quad V = \inf_{\nu} V_{\nu}(E), \quad V_{\nu}(E) = \sup_z U^{\nu}(z). \quad (4)$$

Если  $V = \infty$ , то полагают  $C(E) = 0$ . Известно, что  $0 \leq C(E) < \infty$ ,  $C(E_1) \leq C(E_2)$ , если  $E_1 \subseteq E_2$ ;  $C(E) = 0$ , если  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  с  $C(E_n) = 0$ ;  $E$  имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если  $C(E) = 0$  (см., например [5, с. 155]).

Обозначим через  $A(\zeta_0, \delta)$  дугу единичной окружности  $\partial\mathbb{D}$  с центром в точке  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$  длины  $2\delta$ , где  $\delta \in (0, \pi)$ . Назовем множество  $E \subset \partial\mathbb{D}$  *логарифмически тонким в точке*  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ , если при  $\delta \rightarrow 0$

$$C(E \cap A(\zeta_0, \delta)) = o\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right). \quad (5)$$

Заметим, что  $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq 1/(\log(1/\delta))$  при  $\delta \rightarrow 0$ , где запись  $u \simeq v$  означает, что для достаточно малых  $\delta$  найдется постоянная  $c \in (0, \infty)$  такая, что  $v/c \leq u \leq c \cdot v$  (см., например, [6, с. 131]). Таким образом, (5) означает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(E \cap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} = 0, \quad (6)$$

т.е.  $\zeta_0$  является *точкой разрежения для множества*  $E$  относительно логарифмической емкости.

Говорим, что функция  $\varphi: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  *почти непрерывна* в точке  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ , если найдется некоторое логарифмически тонкое множество  $E \subseteq \partial\mathbb{D}$  такое, что  $\varphi(\zeta) \rightarrow \varphi(\zeta_0)$  при  $\zeta \rightarrow \zeta_0$  вдоль множества  $\partial\mathbb{D} \setminus E$ . Другими словами,  $\varphi$  *аппроксимативно непрерывна в точке*  $\zeta_0$  относительно логарифмической емкости. Говорим также, что  $\varphi$  *почти непрерывна на*  $\partial\mathbb{D}$ , если она почти непрерывна в каждой точке  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ , за исключением, быть может, множества логарифмической емкости нуль. Все эти понятия инвариантны относительно квазиконформных отображений комплексной плоскости на себя, сохраняющих единичную окружность, поскольку такие отображения непрерывны по Гельдеру на  $\partial\mathbb{D}$ .

Под *регулярным решением задачи Римана–Гильберта* (2) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать непрерывное в  $\mathbb{C}$ , дискретное и открытое отображение  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  класса  $W_{\text{loc}}^{1,1}$ , которое удовлетворяет уравнению (1) п.в. и граничному условию (2) вдоль некасательных путей для всех  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ , за исключением, быть может, множества логарифмической емкости нуль. Напомним, что отображение  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  *дискретно*, если прообраз  $f^{-1}(y)$  каждой точки  $y \in \mathbb{C}$  состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества  $U \subseteq \mathbb{D}$  является открытым в  $\mathbb{C}$ .

Мы называем  $\lambda: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  *функцией ограниченной вариации*, пишем  $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ , если  $V_{\lambda}(\partial\mathbb{D}) := \sup \sum_{j=1}^k |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty$ , где супремум берется над всеми конечными наборами точек  $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , с циклическим порядком, означающим, что  $\zeta_j$  лежит между  $\zeta_{j+1}$  и  $\zeta_{j-1}$  для каждого  $j = 1, \dots, k$ . Здесь мы предполагаем, что  $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$ . Для функции  $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$  с  $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$ , ее *индекс* есть целое число  $I_{\lambda} = \Delta/2\pi$ , где  $\Delta = \Delta_{\partial\mathbb{D}} \arg \lambda$  — приращение аргумента функции  $\lambda(\zeta)$ , когда точка  $\zeta$  обходит окружность  $\partial\mathbb{D}$  один раз против часовой стрелки.

## 2. Основной результат.

**Теорема 1.** Пусть  $\mu: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  — измеримая функция с  $\|\mu\|_\infty < 1$ ,  $\lambda: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  — функция ограниченной вариации с  $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$  и  $\varphi: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  — почти непрерывная функция. Если  $I_\lambda \geq 0$ , то существует регулярное решение  $f$  задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1).

Действительно, продолжая  $\mu$  нулем всюду вне  $\mathbb{D}$ , получаем существование квазиконформного отображения  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  с нормировками  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$  и  $f(\infty) = \infty$ , удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1) (см., например, теорему V.1.3 в [8]). Жорданова область  $f(\mathbb{D})$  по теореме Римана может быть отображена с помощью конформного отображения  $g$  на  $\mathbb{D}$  с нормировками  $g(0) = 0$  и  $g(1) = 1$ . Ясно, что  $h := g \circ f$  — квазиконформный гомеоморфизм с  $h(0) = 0$  и  $h(1) = 1$ , удовлетворяющий тому же уравнению Бельтрами (1).

По принципу отражения (см., например, теорему I.8.4 в [8]), привлекая инверсию относительно единичной окружности в образе и прообразе, мы можем продолжить  $h$  до квазиконформного отображения  $H: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  с нормировками  $H(0) = 0$ ,  $H(1) = 1$  и  $H(\infty) = \infty$ . Так как  $H$  и  $H^{-1}$  являются непрерывными по Гельдеру на  $\partial\mathbb{D}$  (см., например, теорему II.4.3 в [8]), имеем, что функция  $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$  является почти непрерывной. Ясно также, что  $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$  — ограниченной вариации.

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта для аналитических функций  $F$ :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) = \Phi(\zeta) \quad (7)$$

с пределом вдоль некасательных путей везде на  $\partial\mathbb{D}$ , за исключением, быть может, некоторого множества логарифмической емкости нуль.

Прежде всего рассмотрим случай, когда  $I_\Lambda = 0 = I_\lambda$ . Тогда  $\lambda(\zeta) = e^{i\alpha(\zeta)}$ , где функция аргумента  $\alpha = \alpha_\Lambda: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  является однозначной функцией ограниченной вариации, и

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta) \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in \mathbb{D},$$

является аналитической функцией в  $\mathbb{D}$  с  $u(z) = \operatorname{Re} G(z) \rightarrow \alpha(\zeta)$  при  $z \rightarrow \zeta$  для всех  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ , за исключением (счетного числа) точек разрыва функции  $\alpha$  (см., например, теоремы I. D.2.2 в [9]). В силу ограниченности  $\alpha$ ,  $u \in h^p$  для всех  $p \geq 1$  по теореме IX.2.3 в [10] и, следовательно,  $v = \operatorname{Im} G \in h^p$  для всех  $p \geq 1$  (см., например, теорему IX.3.4 в [10]). Поэтому найдется функция  $\beta: \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta \in L^p$ , такая, что  $v(z) \rightarrow \beta(\zeta)$  при  $z \rightarrow \zeta$  для п. в.  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  вдоль некасательных путей (см., например, следствие IX.2.2 в [10]).

Более того, поскольку  $\alpha \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ , функция  $\beta$  является почти непрерывной функцией на  $\partial\mathbb{D}$  и найдется множество  $E \subseteq \partial\mathbb{D}$  логарифмической емкости нуль такое, что  $v(z) \rightarrow \beta(\zeta)$  при  $z \rightarrow \zeta$  вдоль любых некасательных путей для всех  $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus E$  (см. теорему 1 в [7], а также теоремы I. E.3.2 и I. E.4.1 в [9] и теорему IX.1.3 в [10]). Таким образом,  $G(z) \rightarrow \alpha(\zeta) + i\beta(\zeta)$  при  $z \rightarrow \zeta$  вдоль любых некасательных путей для всех  $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — подмножество  $\partial\mathbb{D}$  логарифмической емкости нуль.

Далее, поскольку функции  $\Phi$  и  $\beta$  почти непрерывны на  $\partial\mathbb{D}$ , то функция  $\Psi = \Phi e^\beta$  также почти непрерывна. Но тогда в единичном круге  $\partial\mathbb{D}$  найдется гармоническая функция  $U$  такая, что  $U(z) \rightarrow \Psi(\zeta)$  при  $z \rightarrow \zeta$  вдоль любых некасательных путей для всех  $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}_*$ , где  $\mathcal{E}_* \subseteq \partial\mathbb{D}$  — некоторое множество логарифмической емкости нуль. Пусть  $\mathcal{A} = U + iV$ , где  $V$  — гармонически сопряженная к  $U$  функция в единичном круге. Элементарные вычисле-

ния показывают, что функция  $F = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B} = e^{iG}$ , является искомым решением задачи Римана–Гильберта (9) в случае  $I_\lambda = 0$ .

Теперь рассмотрим случай, когда  $I_\lambda > 0$ . Для произвольных  $z_j \in \mathbb{D}$ ,  $j = 1, \dots, I_\lambda$ , положим

$$\lambda^*(\zeta) = \lambda(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{|\zeta - z_j|}{\zeta - z_j}, \quad \varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{1}{|\zeta - z_j|}, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Так как  $I_{\lambda_1 \lambda_2} = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2}$ , получаем, что  $I_{\lambda^*} = 0$  и искомое решение имеет вид

$$F(z) = F^*(z) \prod_{j=1}^{I_\lambda} (z - z_j), \quad z \in \mathbb{D},$$

где  $F^*$  — решение задачи Римана–Гильберта из предыдущего абзаца с  $\lambda^*$  и  $\varphi^*$  вместо  $\lambda$  и  $\varphi$  в граничном условии (7).

Наконец, решение исходной задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1) имеет вид  $f = F \circ H$ .

1. Hilbert D. Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie // Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. – Leipzig: Teubner, 1905. – P. 233–240.
2. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. – Leipzig: Teubner, 1912. – 282 p.
3. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
4. Носиро К. Предельные множества. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1963. – 253 с.
5. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. – Москва: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
6. Adams D. R., Hedberg L. I. Function spaces and potential theory. – Berlin: Springer, 1996. – 366 p.
7. Twomey J. B. The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bull. – 2006. – No 58. – P. 81–91.
8. Lehto O., Virtanen K. J. Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. – 258 p.
9. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$ . – Москва: Мир, 1984. – 368 с.
10. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.

Институт прикладной математики  
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 18.11.2013

А. С. Єфімушкін, В. І. Рязанов

## Про регулярні розв'язки задачі Рімана–Гільберта для рівнянь Бельтрамі

*Для невідроджених рівнянь Бельтрамі в одиничному колі доведено існування регулярних розв'язків задачі Рімана–Гільберта з коефіцієнтами, що мають обмежену варіацію, і майже неперервними межовими даними.*

A. S. Yefimushkin, V. I. Ryazanov

**On the regular solutions of the Riemann–Hilbert problem for the Beltrami equations**

*For the non-degenerate Beltrami equations in a unit disk, the existence of regular solutions of the Riemann–Hilbert problem with coefficients of bounded variation and almost continuous boundary data is proved.*