УДК 531.36

А. С. Хорошун

Об устойчивости неточных сингулярно возмущенных систем Такаги–Сугено. Случай устойчивых подсистем

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Определены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия нечеткой модели с параметрическими неточностями. Построена соответствующая функция Ляпунова. Найдена область в пространстве параметров, для значений параметров из которой указанный тип устойчивости сохраняется.

Подход, предложенный Такаги и Сугено [1] для моделирования сложных производственных процессов в виде некоторого "набора" математических моделей, каждая из которых описывает локальную динамику процесса, активно развивается в настоящее время. С его помощью удалось получить так называемые нечеткие (fuzzy) модели и сконструировать так называемое нечеткое управление для многих процессов, моделирование которых ранее не представлялось возможным. В данной работе указанный подход развивается для моделей, которые описываются сингулярно возмущенными системами дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим нечеткую модель некоторого механического или другой природы процесса в виде системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, для описания которой использован набор нечетких предикатных правил в следующем виде:

$$\begin{aligned} &R_i\colon \quad \text{если} \quad z_1(t) \in M_{i1} \quad \text{и} \quad \ldots \quad \text{и} \quad z_s(t) \in M_{is}, \\ &\text{то} \quad \begin{cases} \dot{x} = f_i(x, y, p), \\ \varepsilon \dot{y} = g_i(x, y, p), \end{cases} \quad i = \overline{1, r}, \end{aligned} \tag{1}$$

где M_{ig} — нечеткие множества, определенные функциями принадлежности $\overline{M}_{ig}\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, $i = \overline{1, r}$, $g = \overline{1, s}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — переменные, определяющие состояние системы (1) в момент времени $t \in \mathbb{R}_+$, $f_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^n$; $g_i(x, y, p) \in \mathbb{R}^m$ — векторные функции, которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми по переменным x и y и непрерывно зависящими от векторного параметра $p \in \mathbb{R}^l$; $\varepsilon \in (0, 1]$ — малый параметр; $z_1(t), \ldots, z_s(t)$ — некоторые системные переменные.

Относительно функций $f_i(x, y, p)$, $g_i(x, y, p)$ сделаем следующее предположение.

Предположение 1. *Функции $f_i(x, y, p)$, $g_i(x, y, p)$ таковы, что $f_i(0, 0, p) = 0$ и $g_i(0, 0, p) = 0$, $i = \overline{1, r}$.*

Учитывая сделанное предположение и используя формулу конечных приращений Лагранжа для функций $f_i(x,y,p)$, $g_i(x,y,p)$, $i=\overline{1,r}$, системы (1) приведем к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}^i(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_i,p)x + A_{12}^i(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_i,p)y, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}^i(\widetilde{\widetilde{x}}_i,\widetilde{\widetilde{y}}_i,p)x + A_{22}^i(\widetilde{\widetilde{x}}_i,\widetilde{\widetilde{y}}_i,p)y, \end{cases} \qquad i=\overline{1,r}, \tag{2}$$

где

$$A_{11}^i(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_i,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\widetilde{x}_i \\ y=\widetilde{y}_i}}, \qquad A_{12}^i(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_i,p) = \frac{\partial f_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\widetilde{x}_i \\ y=\widetilde{y}_i}},$$

$$A_{21}^i(\widetilde{\widetilde{x}}_i,\widetilde{\widetilde{y}}_i,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=\widetilde{\widetilde{x}}_i \\ y=\widetilde{\widetilde{y}}_i}}, \qquad A_{22}^i(\widetilde{\widetilde{x}}_i,\widetilde{\widetilde{y}}_i,p) = \frac{\partial g_i(x,y,p)}{\partial y}\Big|_{\substack{x=\widetilde{\widetilde{x}}_i \\ y=\widetilde{\widetilde{y}}_i}}, \qquad i=\overline{1,r},$$

$\widetilde{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_i \in \mathbb{R}^m$, $\widetilde{\widetilde{x}}_i \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\widetilde{y}}_i \in \mathbb{R}^m$ — некоторые точки соответствующих пространств. Далее, для простоты, будем писать $A_{11}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{12}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{21}^i(x_i,y_i,p)$, $A_{22}^i(x_i,y_i,p)$, учитывая, что x и y, вообще говоря, разные и не произвольные в этих обозначениях.

Относительно систем (2) сделаем следующее предположение.

Предположение 2. *Системы уравнений* (2) *таковы, что*

1) при некотором значении параметра $p=p^*$ и всех значениях $i=\overline{1,r}$ матрицы $A_{11}^i(0,0,p^*)$, $A_{22}^i(0,0,p^*)$ устойчивы;

2) существуют такие положительные числа α_i, β_i, γ_i, $\delta_i < +\infty$, $i=\overline{1,r}$, что выполняются оценки:

$$\|A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*)\| \leqslant \alpha_i, \qquad \|A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)\| \leqslant \beta_i,$$

$$\|A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*)\| \leqslant \gamma_i, \qquad \|A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*)\| \leqslant \delta_i$$

для всех $i=\overline{1,r}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $p\in P\subseteq\mathbb{R}^l$.

Замечание 1. Здесь и далее по тексту используется спектральная норма для матриц и евклидова норма для векторов.

После приведения к четкости центроидным методом получаем систему дифференциальных уравнений, которая описывает полную динамику исходной нечеткой модели

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z)[A_{11}^i(x,y,p)x + A_{12}^i(x,y,p)y], \\ \varepsilon\dot{y} = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(z)[A_{21}^i(x,y,p)x + A_{22}^i(x,y,p)y], \end{cases} \tag{3}$$

где $\mu_i(z) = \omega_i(z(t))/\sum\limits_{i=1}^{r}\omega_i(z(t))$; $\omega_i(z(t)) = \prod\limits_{g=1}^{s}\overline{M}_{ig}(z_g(t))$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{r}\mu_i(z) = 1$ и $\mu_i(z)\geqslant 0$, $i=\overline{1,r}$. Предполагаем, что система дифференциальных уравнений (3) имеет единственное решение начальной задачи.

Целью данной работы является получение достаточных условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (3), которая будет иметь место при любых значениях $\mu_i(z)$, при всех значениях параметра p из некоторой области $P\subseteq\mathbb{R}^l$ и любых значениях малого параметра $\varepsilon\in(0,1]$.

Основной результат. Пусть выполняются условия предположений 1, 2 и для описания динамики исходного реального процесса используется система дифференциальных уравнений (3).

Рассмотрим системы линейных матричных неравенств

$$(A_{11}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_1(A_{11}^i(0,0,p^*)) < 0, \qquad i = \overline{1,r}, \tag{4}$$

$$(A_{22}^i(0,0,p^*))^T P_2 + P_2(A_{22}^i(0,0,p^*)) < 0, \qquad i = \overline{1,r}, \tag{5}$$

где $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — симметрические положительно определенные матрицы. Построим скалярную функцию

$$V(x,y,\varepsilon) = x^T P_1 x + \varepsilon y^T P_2 y \tag{6}$$

и найдем ее производную по времени в силу системы (3)

$$\begin{aligned}
\dot V(x,y,\varepsilon)\Big|_{(3)} &= \dot x^T P_1 x + x^T P_1 \dot x + \varepsilon \dot y^T P_2 y + \varepsilon y^T P_2 \dot y = \\
&= \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z)[A_{11}^i(x,y,p)x + A_{12}^i(x,y,p)y]\right)^T P_1 x + \\
&+ x^T P_1 \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z)[A_{11}^i(x,y,p)x + A_{12}^i(x,y,p)y]\right) + \\
&+ \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z)[A_{21}^i(x,y,p)x + A_{22}^i(x,y,p)y]\right)^T P_2 y + \\
&+ y^T P_2 \left(\sum_{i=1}^r \mu_i(z)[A_{21}^i(x,y,p)x + A_{22}^i(x,y,p)y]\right) = \\
&= \sum_{i=1}^r \mu_i(z)[x^T[(A_{11}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0,0,p^*)]x + \\
&+ x^T[(A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_1(A_{11}^i(x,y,p) - A_{11}^i(0,0,p^*))]x + \\
&+ x^T[P_1 A_{12}^i(0,0,p^*) + (A_{21}^i(0,0,p^*))^T P_2]y + x^T[P_1(A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*)) + \\
&+ (A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*))^T P_2]y + y^T[(A_{12}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_2 A_{21}^i(0,0,p^*)]x + \\
&+ y^T[(A_{12}^i(x,y,p) - A_{12}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_2(A_{21}^i(x,y,p) - A_{21}^i(0,0,p^*))]x + \\
&+ y^T[(A_{22}^i(0,0,p^*))^T P_2 + P_2 A_{22}^i(0,0,p^*)]y + \\
&+ y^T[(A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*))^T P_2 + P_2(A_{22}^i(x,y,p) - A_{22}^i(0,0,p^*))]y].
\end{aligned} \tag{7}$$

Учитывая соотношение (7) и п. 2 предположения 2, получим следующую оценку для производной функции (6) по времени в силу системы (3):

$$\dot V(x,y,\varepsilon)\Big|_{(3)} \leqslant (\|x\|,\|y\|)\left[\sum_{i=1}^r \mu_i(z) D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i)\right](\|x\|,\|y\|)^T, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
&D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i)=\begin{pmatrix} A_i(\alpha_i) & B_i(\beta_i,\gamma_i)\\ B_i(\beta_i,\gamma_i) & C_i(\delta_i)\end{pmatrix};\\
&A_i(\alpha_i)=\lambda_{\max}[(A^i_{11}(0,0,p^*))^T P_1+P_1A^i_{11}(0,0,p^*)]+2\alpha_i\|P_1\|;\\
&B_i(\beta_i,\gamma_i)=\|P_1A^i_{12}(0,0,p^*)+(A^i_{21}(0,0,p^*))^TP_2\|+\|P_1\|\beta_1+\|P_2\|\gamma_i;\\
&C_i(\delta_i)=\lambda_{\max}[(A^i_{22}(0,0,p^*))^TP_2+P_2A^i_{22}(0,0,p^*)]+2\delta_i\|P_2\|,\qquad i=\overline{1,r};
\end{aligned}\tag{9}$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Сформулируем и докажем теорему, которая определяет достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной системы дифференциальных уравнений (3) относительно некоторой области в пространстве параметров.

Теорема 1. *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (3) *выполняются условия предположения 2, системы линейных матричных неравенств* (4), (5) *совместны на множестве симметрических положительно определенных матриц* P_1 *и* P_2 *соответственно и для величин* α_i, β_i, γ_i, δ_i *для всех* $i=\overline{1,r}$ *выполняются соотношения*

$$A_i(\alpha_i)<0,\tag{10}$$

$$A_i(\alpha_i)C_i(\delta_i)-B_i^2(\beta_i,\gamma_i)>0.\tag{11}$$

Тогда состояние равновесия $x=0$, $y=0$ *системы* (3) *асимптотически устойчиво для всех* $p\in P$ *и всех* $\varepsilon\in(0,1]$.

Доказательство. Выберем величины α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, так, чтобы выполнялись соотношения (10), (11), произвольное $p\in P$ и рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3) при этом значении параметра. Построим скалярную функцию (6), используя симметрические положительно определенные матрицы P_1 и P_2, которые являются решениями систем линейных матричных неравенств (4) и (5) соответственно. Очевидно, что рассматриваемая скалярная функция положительна для всех значений $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, кроме нулевых и $\varepsilon\in(0,1]$. Для производной функции (6) по времени в силу системы (3) имеет место оценка (8). Согласно соотношениям (10), (11), матрицы (9) отрицательно определены для выбранных α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$. Так как $\mu_i(z)\geqslant 0$, $i=\overline{1,r}$, для всех z и имеет место теорема Вейля (см. [2]), матрица

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z)D_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i,\delta_i)$$

отрицательно определена для всех z при выбранных α_i, β_i, γ_i, δ_i, $i=\overline{1,r}$, т. е. производная функции (6) по времени в силу системы (3) определенно отрицательна для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $\varepsilon\in(0,1]$ и при произвольных значениях z. Значит, функция (6) является функцией Ляпунова, позволяющей, в силу теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. [3]), установить асимптотическую устойчивость нулевого состояния равновесия системы (3). Так как p — произвольная точка из области P, то указанный тип устойчивости имеет место для всех значений параметра p из области P.

Теорема доказана.

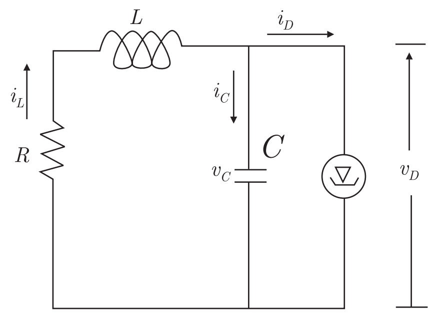

Рис. 1

Замечание 2. Поскольку, согласно условию теоремы, величины $A_i(\alpha_i)$, $C_i(\delta_i)$, $i = \overline{1,r}$, отрицательны, то из выражений для этих величин можно получить следующие верхние оценки для значений α_i, δ_i, $i = \overline{1,r}$:

$$\alpha_i < \frac{-\lambda_{\max}[(A_{11}^i(0,0,p^*))^T P_1 + P_1 A_{11}^i(0,0,p^*)]}{2\|P_1\|},$$

$$\delta_i < \frac{-\lambda_{\max}[(A_{22}^i(0,0,p^*))^T P_2 + P_2 A_{22}^i(0,0,p^*)]}{2\|P_2\|}.$$

Пример. Рассмотрим электрическую цепь (см. [4]), содержащую туннельный диод, которая изображена на рис. 1.

Туннельный диод характеризуется следующим соотношением: $i_D(t) = 0{,}01 V_D(t) + {}+0{,}05 V_D^3(t)$. Считаем индуктивность катушки L малым "паразитным" параметром и введем переменные $x_1(t) = V_C(t)$, $x_2(t) = i_L(t)$. Выберем такие параметры цепи: $C = 100$ мФ, $L = \varepsilon$ Гн, $R = 250 \pm 45$ Ом, т. е. значение сопротивления резистора известно неточно. Предположим, что $|x_1| < 3$ и что значение величины шума настолько мало, что им можно пренебречь. Тогда нечеткую модель для описания исходной электрической цепи получим в следующем виде:

$$\text{если} \quad x_1 \in M_1(x_1), \quad \text{то} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -0{,}1 x_1 + 10 x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (250 + p) x_2, \end{cases}$$

$$\text{если} \quad x_1 \in M_2(x_1), \quad \text{то} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -4{,}6 x_1 + 10 x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -x_1 - (250 + p) x_2, \end{cases}$$

где $M_1(x_1) = (3 - |x_1|)/3$, $M_2(x_1) = |x_1|/3$.

После приведения к четкости получим описание полной динамики нечеткой модели следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu_1(z)[-0{,}1 x_1 + 10 x_2] + \mu_2(z)[-4{,}6 x_1 + 10 x_2], \\ \varepsilon \dot{x}_2 = \mu_1(z)[-x_1 - (250 + p) x_2] + \mu_2(z)[-x_1 - (250 + p) x_2], \end{cases} \tag{12}$$

где $z = (x_1 x_2)^T$. Очевидно, что система дифференциальных уравнений (12) удовлетворяет условиям предположения 2, где $p^* = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 45$, $P = \{p \in \mathbb{R} \mid |p| \leqslant 45\}$.

Системы линейных матричных неравенств (4), (5) совместны при значениях $P_1 = (1)$, $P_2 = (1)$ соответственно. Так как $A_1(\alpha_1) = -0,2$, $A_2(\alpha_2) = -9{,}2$, $B_1(\beta_1, \gamma_1) = B_2(\beta_2, \gamma_2) = 9$,

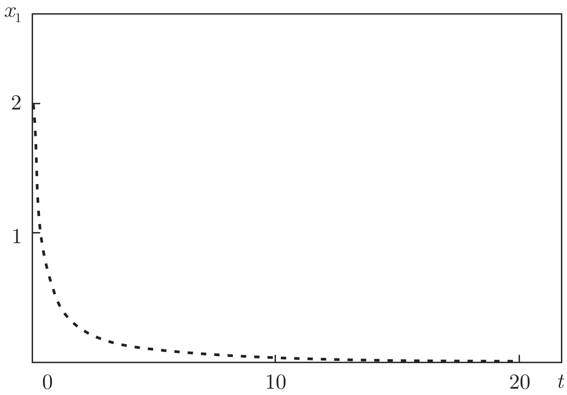

Рис. 2

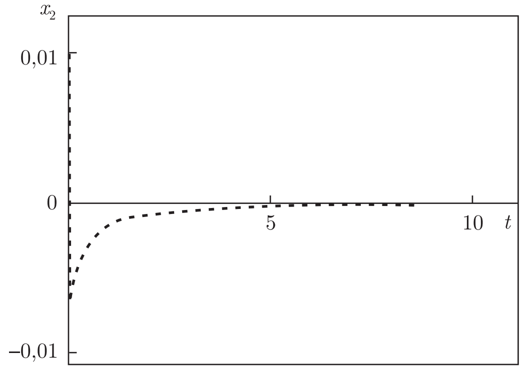

Рис. 3

$C_1(\delta_1) = C_2(\delta_2) = -410$ и соотношения (10), (11) справедливы при $i = 1, 2$, то, согласно теореме 1, нулевое состояние равновесия системы (12) асимптотически устойчиво для всех $p \in P$ и всех $\varepsilon \in (0, 1]$.

Поведение решений системы (12) при $p = 40$, $\varepsilon = 0{,}5$, $x_0 = (20{,}01)^T$ изображено на рис. 2, 3.

1. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1985. – **15**, No 1. – P. 116–132.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
3. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости – Москва: Наука, 1967. – 223 с.
4. *Assawinchaichote W., Nguang S. K.* H_∞ filtering for fuzzy singularly perturbed systems with pole placement constraints: an LMI approach // IEEE Trans. Signal Processing. – 2004. – **52**, No 6. – P. 1659–1667.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.10.2013

А. С. Хорошун

Про стійкість неточних сингулярно збурених систем Такагі–Сугено. Випадок стійких підсистем

Визначено достатні умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги нечіткої моделі з параметричними неточностями. Побудовано відповідну скалярну функцію Ляпунова. Знайдено область у просторі параметрів, для значень параметрів з якої вказаний тип стійкості зберігається.

A. S. Khoroshun

About the stability of Takagi–Sugeno uncertain singularly perturbed systems. The case of stable subsystems

The sufficient conditions of the asymptotic stability of a fuzzy model with parametric uncertainties are established. An appropriate scalar Lyapunov function is built. The region in the space of parameters, for which the mentioned type of stability holds, is found.