

Л. А. Курдаченко, М. М. Семко, С. Атліхан

Про структуру локально скінченних груп, усі неабелеві підгрупи яких субнормальні*(Представлено академіком НАН України А. М. Самоїленком)**Вивчено нескінченні групи, всі неабелеві підгрупи яких є субнормальними. Наведено деякі результати про будову таких груп та дано повний опис локально скінченних груп, що мають вказану властивість.*

Нехай G — група і ρ — теоретико-підгрупова властивість. Ця властивість може бути *внутрішньою*, наприклад такою, як властивості “бути нормальною підгрупою”, “бути субнормальною підгрупою”, “бути майже нормальною підгрупою”, “бути зростаючою підгрупою”, “бути переставною підгрупою” тощо; або ця властивість може бути *зовнішньою*, що визначається деяким класом груп, наприклад такою, як властивості “бути абелевою підгрупою”, “бути неабелевою підгрупою”, “бути нільпотентною підгрупою”, “бути розв’язною підгрупою”, “бути радикальною підгрупою” тощо. Позначимо через $L_\rho(G)$ систему всіх підгруп групи G , які мають властивість ρ . Взаємовідношення між системами підгруп $L_\rho(G)$ та $L_\nu(G)$ для різних властивостей ρ та ν можуть бути досить різноманітними. Першим природним випадком тут буде випадок, коли $L_\rho(G) \subseteq L_\nu(G)$. Такі ситуації для конкретних властивостей ρ та ν вивчалися багатьма авторами. Наприклад, якщо ρ — це властивість “бути власною підгрупою”, то ми приходимо до груп, усі власні підгрупи яких мають властивість ν . Існує досить великий масив статей, де такі групи вивчалися для різноманітних природних властивостей ν . Однією з найбільш важливих є властивість “бути нормальною підгрупою”. Групи, в яких $L_\rho(G) \subseteq L_{\text{норм}}(G)$ (тут через $L_{\text{норм}}(G)$ позначена система всіх нормальних підгруп), досить довгий час вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, оглядову статтю [1]). Серед інших досліджувалися і групи, всі неабелеві підгрупи яких є нормальними. Такі групи були названі *метагамільтоновими*. Вивчення цих груп було розпочато М. Ф. Сесекіним та Г. М. Ромалісом [2–4] і продовжено В. Т. Нагребецьким [5] та О. О. Махньовим [6]. Але вичерпний опис метагамільтонових груп отримано М. Ф. Кузенним та М. М. Семко у серії статей [7–10]. Слід також відзначити, що В. Т. Нагребецький [11] розглядав скінченні групи, всі нільпотентні підгрупи яких нормальні.

Природним і досить широким узагальненням нормальних підгруп є субнормальні підгрупи. У статтях [12, 13] Х. Сміт розпочав вивчення локально майже розв’язних груп, усі нільпотентні підгрупи яких субнормальні. Зокрема, він довів, що ці групи розв’язні, більш того, вони є нільпотентними у випадку, коли вони вільні від скруту. Локально скінченні групи, всі нільпотентні підгрупи яких субнормальні, містять у собі нормальну підгрупу скінченного індексу, всі підгрупи якої субнормальні, зокрема, такі групи є майже локально нільпотентними. У випадку скінченних груп розглядалися більш загальні ситуації. В. Н. Княгіна та В. С. Монахов [14] розпочали вивчення скінченних груп з субнормальними підгрупами Шмідта. Пізніше В. А. Ведерніков [15] отримав опис скінченних груп, усі підгрупи Шмідта яких є субнормальними.

© Л. А. Курдаченко, М. М. Семко, С. Атліхан, 2014

У даній роботі ми розпочинаємо вивчення нескінченних груп, усі неабелеві підгрупи яких є субнормальними. Наведемо зараз деякі результати про будову таких груп та дамо повний опис локально скінченних груп, що мають вказану властивість.

Лема 1. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо L — нормальна неабелева підгрупа G , то кожна підгрупа фактор-групи G/L є субнормальною. Зокрема, G/L є локально нільпотентною та розв'язною.*

Лема 2. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо L, K — такі нормальні неабелеві підгрупи G , що $K \cap L = \langle 1 \rangle$, то G є локально нільпотентною та розв'язною.*

Наслідок. *Нехай G — група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо існують такі прості числа p, q , що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p -підгрупу P та неабелеву силовську q -підгрупу Q , то група G є локально нільпотентною та розв'язною.*

Лема 3. *Нехай G — нескінченна періодична група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо G локально нільпотентна, то кожна підгрупа G є субнормальною.*

Наслідок. *Нехай G — періодична група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Якщо існують такі прості числа p, q , що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p -підгрупу P та неабелеву силовську q -підгрупу Q , то кожна підгрупа G є субнормальною.*

Лема 4. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Тоді G є розв'язною.*

Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо G має зростаючий ряд, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними. Зазначимо, що узагальнено радикальна група G має або зростаючу локально нільпотентну підгрупу, або зростаючу локально скінченну підгрупу. У першому випадку локально нільпотентний радикал групи G буде неодиначним. У другому випадку локально скінченний радикал групи G буде неодиначним. Таким чином, узагальнено радикальна група має зростаючий ряд нормальних підгруп, фактори якого є локально нільпотентними або локально скінченними.

Пропозиція 1. *Нехай G — локально узагальнено радикальна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними. Тоді G є розв'язною.*

Наведемо тепер опис локально скінченних груп, усі неабелеві групи яких є субнормальними.

Теорема. *Нехай G — локально скінченна група, всі неабелеві підгрупи якої є субнормальними.*

(i) *Якщо G локально нільпотентна, то кожна підгрупа G субнормальна.*

(ii) *Якщо існують такі прості числа p, q , що $p \neq q$ і G має неабелеву силовську p -підгрупу P та неабелеву силовську q -підгрупу Q , то кожна підгрупа G є субнормальною.*

(iii) *Нехай G не є локально нільпотентною та має неабелеву силовську p -підгрупу P для деякого простого числа p . Тоді мають місце такі твердження:*

(iiia) $G = P \rtimes Q$, де Q є абелевою силовською p' -підгрупою G ;

(iiib) $C = C_P(Q)$ є такою G -інваріантною абелевою підгрупою P , що P/C є скінченним G -головним фактором;

(iiic) $G/C_G(P/C)$ — циклічна p' -група;

(iiid) P/C є $\langle g \rangle$ -головним фактором для кожного елемента $g \notin C_G(P/C)$;

(iiie) $P = CD$, де $D = [P, Q]$ — скінченна спеціальна p -підгрупа.

(iv) *Нехай G не є локально нільпотентною, а її силовські s -підгрупи абелеві для кожного простого числа s . Тоді існує таке просте число p , що G має нормальну силовську p -підгрупу P і мають місце такі твердження:*

- (iva) $G = P \rtimes Q$, де Q є абелевою силовською p' -підгрупою G ;
 (ivb) $P = C \times D$, де $C = C_P(Q)$ та $D = [P, Q]$ є мінімальною G -інваріантною підгрупою P ;
 (ivc) $G/C_G(D)$ є циклічною p' -групою;
 (ivd) D є мінімальною $\langle g \rangle$ -інваріантною підгрупою P для будь-якого елемента $g \notin C_G(D)$.

Нагадаємо, що скінченна p -група P , p — просте число, називається спеціальною, якщо $[P, P] = \zeta(P) = \text{Fratt}(P)$ є елементарною абелевою p -підгрупою.

1. Dixon M. R., Subbotin I. Ya. Groups with finiteness conditions on some subGroup systems: a contemporary stage // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – No 4. – P. 29–54.
2. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – 5, № 3. – С. 45–49.
3. Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М. О метагамильтоновых группах II // Там же. – 1968. – 6, № 5. – С. 50–53.
4. Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф. О метагамильтоновых группах III // Там же. – 1970. – 7, № 3. – С. 195–199.
5. Нагребецкий В. Т. Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Там же. – 1967. – 6, № 1. – С. 80–88.
6. Махнев А. А. О конечных метагамильтоновых группах // Там же. – 1976. – 10, № 1. – С. 60–75.
7. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки. – 1983. – 34, № 2. – С. 179–188.
8. Кузенный М. Ф., Семко М. М. Будова розв'язних метагамильтонових груп // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 6–9.
9. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32–40.
10. Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н. Строение периодических метаabelевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн. – 1987. – 39, № 2. – С. 180–185.
11. Нагребецкий В. Т. Конечные ненильпотентные группы, каждая ненильпотентная подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – 6, № 3. – С. 45–49.
12. Smith H. Torsion-free groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Quaderni di Matematica, Topics in infinite groups. – 2001. – 8. – P. 298–308.
13. Smith H. Groups with all non-nilpotent subgroups subnormal // Ibid. – 2001. – 8. – P. 309–326.
14. Княгина В. Н., Монахов В. С. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. – 2004. – 45, № 6. – С. 1316–1322.
15. Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – 46, № 6. – С. 669–687.

Національний університет державної
податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 30.09.2013

Л. А. Курдаченко, Н. Н. Семко, С. Атлихан

О структуре локально конечных групп, все неабелевы подгруппы которых субнормальные

Изучены бесконечные группы, все неабелевы подгруппы которых субнормальные. Приведены некоторые результаты о строении таких групп и дано полное описание локально конечных групп, имеющих указанное свойство.

L. A. Kurdachenko, M. M. Semko, S. Atlihan

About the structure of finite groups, whose all non-Abelian subgroups are subnormal

We study infinite groups, all non-Abelian subgroups of which are subnormal. Some results of these groups' structure and the full description of locally finite groups having a specified property are given.