

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.033>

УДК 539.3

О.Я. Григоренко¹, <https://orcid.org/0000-0002-4109-2672>

І.А. Лоза², <https://orcid.org/0000-0002-2678-6908>

С.О. Сперкач³, <https://orcid.org/0000-0003-3168-6300>

А.Д. Безугла³, <https://orcid.org/0000-0001-8083-3210>

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

² Національний транспортний університет, Київ

³ Технічний центр НАН України, Київ

E-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com, lozaigor1956@gmail.com,
svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

Чисельний розв'язок задачі про поширення вимушених електропружних хвиль у суцільному п'єзокерамічному циліндрі

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.Я. Григоренком

Проведено дослідження поширення вимушених осесиметричних хвиль у суцільному однорідному та неоднорідному п'єзокерамічному циліндрі з осьюовою поляризацією на основі лінійної теорії пружності і лінійного електромеханічного зв'язку. На бічній поверхні циліндра прикладено механічне навантаження і вона вільна від електродів. Розглянуто випадок неперервно неоднорідного п'єзокерамічного матеріалу циліндра. Сформульовано граничні умови в особливій точці циліндра. Для розв'язання поставленої задачі запропоновано дискретно-континуальний чисельно-аналітичний підхід. Після представлення компонент тензора механічних напружень та вектора механічних переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу у вигляді біжучих хвиль вихідну задачу електропружності у частинних похідних зведено до неоднорідної крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях зі змінними коефіцієнтами. Отриману задачу розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Проведено кінематичний аналіз поширення вимушених електропружних хвиль у суцільному п'єзокерамічному однорідному та неоднорідному циліндрах.

Ключові слова: осесиметрична задача, вимушені електропружні хвилі, п'єзокерамічний суцільний циліндр, чисельний підхід, неоднорідний матеріал, кінематичні характеристики.

П'єзокерамічні активні елементи циліндричної форми широко використовуються в радіоелектроніці, приладобудуванні, вимірювальних приладах з використанням нанотехнологій. Вимоги до проведення повного аналізу реальних електромеханічних властивостей циліндричних конструкцій вимагають відповідних досліджень на основі просторової теорії електропружності (3D модель). Труднощі вивчення динамічних процесів у циліндричних п'єзокерамічних тілах

Цитування: Григоренко О.Я., Лоза І.А., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельний розв'язок задачі про поширення вимушених електропружних хвиль у суцільному п'єзокерамічному циліндрі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 4. С. 33–43. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.033>

на основі просторової моделі електропружності пов'язані з необхідністю розв'язання складної системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами з відповідними електромеханічними умовами на поверхнях, що обмежують тіло.

Ми будемо розглядати розповсюдження осесиметричних вимушених електропружних хвиль в суцільних однорідних та неоднорідних циліндрах з п'єзокерамічних матеріалів. Оpubлікована значна кількість результатів досліджень, присвячених поширенню вільних електропружних хвиль у п'єзокерамічних порожнистих та суцільних циліндрах [1, 5, 7–12]. Задачу, коли на поверхню порожнистого циліндра прикладено механічне чи електричне навантаження, розглянуто в [2, 3]

В представленій роботі досліджується поширення вимушених осесиметричних електропружних хвиль у суцільному п'єзокерамічному циліндрі з однорідного та неперевно неоднорідного матеріалу в випадку осьової поляризації на основі ефективного дискретно-континуального чисельно-аналітичного підходу [4, 5]

Основні співвідношення. Система рівнянь, яка описує дану задачу у циліндричній системі координат r, θ, z складається з

рівнянь руху

$$\frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_1 - T_2) + \frac{\partial T_5}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial T_5}{\partial r} + \frac{1}{r}T_5 + \frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1)$$

рівнянь вимушеної електростатики діелектриків

$$\frac{\partial D_1}{\partial r} + \frac{1}{r}D_1 + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad E_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (2)$$

співвідношень Коші для випадку малих деформацій

$$S_1 = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad S_2 = \frac{1}{r}u_1, \quad S_3 = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad S_5 = \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \quad (3)$$

матеріальних співвідношень для випадку осьової поляризації п'єзокерамічного матеріалу

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}S_1^i + c_{12}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3, \\ T_2 &= c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{13}S_3 - e_{13}E_3, \\ T_3 &= c_{13}S_1 + c_{13}S_2 + c_{33}S_3 - e_{33}E_3, \\ T_5 &= 2c_{55}S_5 - e_{15}E_1, \quad D_1 = 2e_{15}S_5 + \epsilon_{11}E_1, \\ D_3 &= e_{13}S_1 + e_{13}S_2 + e_{33}S_3 + \epsilon_{33}E_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут введені позначення: $T_i, S_i, c_{ij}, e_{ij}, \epsilon_{ij}$ — компоненти тензорів напружень, деформацій, пружних модулів при сталому електричному полі, п'єзомодулів та діелектричних проникностей при постійній деформації відповідно; u_i, E_i та D_i — компоненти векторів переміщень, напруженості електричного поля та електричної індукції відповідно; ρ та Φ — густина матеріалу та електростатичний потенціал.

Будемо розглядати наступні граничні умови: на бічній поверхні прикладено навантаження $T_1|_{r=R} = 0, T_5|_{r=R} = Pe^{i(kz - \omega t)}$, а поверхня вільна від електродів $D_1|_{r=R} = 0$.

Після тотожних перетворень співвідношень (1)–(4) відносно компонент розв'язуючого вектора $R = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}$, отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних з змінними коефіцієнтами в випадку неоднорідного матеріалу циліндра:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_5}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{1}{r} T_5 + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_3}{rc_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_5}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_3, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1, \\ \frac{\partial u_1}{\partial r} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 - \frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial r} &= \frac{\epsilon_{11}}{\Delta} T_5 - \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1, \\ \frac{\partial D_1}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial T_1}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_1}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\Delta_4}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут введені позначення $\Delta = c_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2$, $\Delta_1 = e_{13}(c_{11} - c_{12})$, $\Delta_2 = c_{11}^2 - c_{12}^2$, $\Delta_3 = c_{13}(c_{11} - c_{12})$, $\Delta_4 = c_{13}e_{13} - c_{11}e_{33}$, $\Delta_5 = c_{13}^2 - c_{11}c_{33}$, $\Delta_6 = c_{11}\epsilon_{33} + e_{13}^2$.

Метод розв'язування. Компоненти розв'язуючого вектора представляються у вигляді хвиль, що поширюються вздовж поздовжньої координати:

$$\{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{iT_1(r), T_5(r), \Phi(r), iu_1(r), u_3(r), D_1(r)\} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6)$$

З урахуванням (6) система (5) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) T_1 + kT_5 - \frac{k\Delta_1}{rc_{11}} \Phi + \left(\frac{\Delta_2}{r^2 c_{11}} - \rho \omega^2 \right) u_1 - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_3, \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{1}{r} T_5 - \frac{k^2 \Delta_4}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} u_1 - \left(\frac{k^2 \Delta_5}{c_{11}} + \rho \omega^2 \right) u_3, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1, \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{ke_{13}}{c_{11}} \Phi - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_1 + \frac{kc_{13}}{c_{11}} u_3, \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\epsilon_{11}}{\Delta} T_5 - k u_1 + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1, \\ \frac{dD_1}{dr} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{k^2 \Delta_6}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{u_1}{r} - \frac{k^2 \Delta_4}{c_{11}} u_3 - \frac{D_1}{r}. \end{aligned} \quad (7)$$

В системі рівнянь (7), яку ми розглядаємо в інтервалі $0 \leq r \leq R$, необхідно сформулювати граничні умови для сингулярної точки $r = 0$. Для цього використаємо процедуру, яка була запропонована в [6]. Виходячи з фізичних міркувань, маємо такі умови:

$$T_5 \rightarrow 0, \quad u_1 \rightarrow 0, \quad D_1 \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0. \quad (8)$$

При цьому в рівняннях (7) містяться невизначеності, для розкриття яких скористаємось правилом Лопітальє—Бернуллі:

$$\frac{T_1}{r} \rightarrow \frac{dT_1}{dr}, \quad \frac{T_5}{r} \rightarrow \frac{dT_5}{dr}, \quad \frac{u_1}{r} \rightarrow \frac{du_1}{dr}, \quad \frac{D_1}{r} \rightarrow \frac{dD_1}{dr}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) рівняння (7) у точці $r = 0$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \frac{dT_1}{dr} + kT_5 - \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} + \rho\omega^2 u_1 - \frac{k\Delta_3}{rc_{11}} \frac{du_3}{dr}, \\ \frac{dT_5}{dr} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{dT_5}{dr} - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} \Phi - \frac{k\Delta_3}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} + \left(\frac{k^2\Delta_5}{c_{11}} + \rho\omega^2 \right) u_3, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{e_{15}}{\Delta} T_5 - \frac{c_{55}}{\Delta} D_1, \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11}} T_1 + \frac{ke_{13}}{c_{11}} \Phi - \frac{c_{12}}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} + \frac{kc_{13}}{c_{11}} u_3, \\ \frac{du_3}{dr} &= \frac{\varepsilon_{11}}{\Delta} T_5 - ku_1 + \frac{e_{15}}{\Delta} D_1, \\ \frac{dD_1}{dr} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}} T_1 - \frac{k^2\Delta_6}{c_{11}} \Phi + \frac{k\Delta_1}{c_{11}} \frac{du_1}{dr} - \frac{k^2\Delta_4}{c_{11}} u_3 - \frac{dD_1}{dr}. \end{aligned} \quad (10)$$

Після ряду перетворень, отримаємо систему рівнянь для точки $r = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dr} &= 0, \\ \frac{\partial T_5}{\partial r} &= -\frac{kc_{13}}{c_{11} + c_{12}} T_1 - \frac{k^2}{2} \left(e_{33} - \frac{2c_{12}c_{13}e_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} \right) \Phi - \left(\frac{k^2}{2} \left(c_{33} - \frac{2c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}} \right) + \frac{\Omega^2}{2} \right) u_3, \\ \frac{d\Phi}{dr} &= 0, \\ \frac{du_1}{dr} &= \frac{1}{c_{11} + c_{12}} [T_1 + k(e_{13}\Phi + c_{13}u_3)]; \\ \frac{du_3}{dr} &= 0, \\ \frac{\partial D_1}{\partial r} &= -\frac{ke_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} T_1 + \frac{k^2}{2c_{11}} \left(\Delta_6 - \frac{e_{13}\Delta_1}{c_{11} + c_{12}} \right) \Phi + \frac{k^2e_{13}}{2} \left(1 - \frac{2c_{12}c_{13}}{c_{11}(c_{11} + c_{12})} \right) u_3. \end{aligned} \quad (11)$$

В остаточному вигляді будемо мати для області $0 < r \leq R$ систему рівнянь (7), а для точки $r = 0$ – систему рівнянь (11).

Введемо безрозмірні величини:

$$\Omega = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}, \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}, \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\epsilon_0 \lambda}}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_0}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad \zeta = kR,$$

де R – радіус циліндра; ρ – густина матеріалу циліндра; ϵ_0 – діелектрична проникність вакууму; $\lambda = 10^{10}$ Н/м².

Маємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівняннях виду:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{R}; \quad \mathbf{R} = \{T_1, T_5, \Phi, u_1, u_3, D_1\}. \quad (12)$$

Матриця \mathbf{A} для точки $x = 0$ має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{13}\zeta}{c_{11}+c_{12}} & 0 & -\frac{\zeta^2}{2} \left(e_{33} - \frac{2c_{12}c_{13}e_{13}}{c_{11}(c_{11}+c_{12})} \right) & 0 & -\left(\frac{\zeta^2}{2} \left(e_{33} - \frac{2c_{13}^2c_{13}e_{13}}{c_{11}(c_{11}+c_{12})} \right) + \frac{\Omega}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_{11}+c_{12}} & 0 & \frac{\zeta e_{13}}{c_{11}+c_{12}} & 0 & \frac{\zeta c_{13}}{c_{11}+c_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta e_{13}}{c_{11}(c_{11}+c_{12})} & 0 & \frac{\zeta^2}{2} \left(\frac{\Delta_6 - e_{13}\Delta_5}{c_{11}+c_{12}} \right) & 0 & \frac{\zeta^2 e_{13}}{2} \left(1 - \frac{2c_{12}c_{13}}{c_{11}(c_{11}+c_{12})} \right) & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

а для точок $x \in (0, 1]$ має вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \left(\frac{\tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{11}} - 1 \right) & \zeta & -\frac{\zeta \Delta_1}{x \tilde{c}_{11}} & -\left(\frac{\Delta_2}{x^2 \tilde{c}_{11}} + \Omega^2 \right) & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & \frac{1}{x} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\zeta \Delta_3}{x \tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta^2 \Delta_5}{\tilde{c}_{11}} - \Omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}_{55}}{\Delta} \\ \frac{1}{\tilde{c}_{11}} & 0 & \frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{\tilde{c}_{12}}{x \tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta \tilde{c}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\epsilon}_{11}}{\Delta} & 0 & -\zeta & 0 & \frac{\tilde{e}_{15}}{\Delta} \\ -\frac{\zeta \tilde{e}_{13}}{\tilde{c}_{11}} & 0 & -\frac{\zeta^2 \Delta_6}{\tilde{c}_{11}} & \frac{\zeta \Delta_1}{x \tilde{c}_{11}} & -\frac{\zeta^2 \Delta_4}{\tilde{c}_{11}} & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{V}_1 \bar{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{V}_2 \bar{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{C}_2, \quad (15)$$

де

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримана крайова задача інтегрується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [4, 5].

Чисельний аналіз. Крайова задача (12), (15) для однорідного суцільного циліндра чисельно розв'язана для випадку п'єзокераміки PZT 4 з фізико-механічними характеристиками:

$$c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad e_{13} = -5,2 \text{ К/м}^2, \quad e_{15} = 12,7 \text{ К/м}^2, \quad e_{33} = 15,1 \text{ К/м}^2, \quad \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_0} = 730,$$

$$\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_0} = 635, \quad \rho_n = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Проведемо дослідження впливу виду електричних граничних умов на характер дисперсійних відношень (рис.1). Широкими лініями зображені дисперсійні криві для п'єзокерамічного циліндра, вільного від електродів, а вузькими — для випадку вкритого електродом циліндра. З наведеного рисунку видно, що вплив типу електричних граничних умов є більшим для частот, які народжуються пружними, це гілки $U(n)$. Причому найбільший вплив типу електричних граничних умов можна помітити в довгохвильовій області. Зі зменшенням довжини хвилі вплив типу електричних граничних умов на дисперсійні хвилі пропадає.

Проведемо дослідження амплітуд власних коливань ($k=0$) п'єзокерамічних циліндрів для перших п'яти власних частот. На рис.2, а представлено розподіл напружень T_1 та T_5 для другої та п'ятої власних частот циліндра із п'єзокераміки PZT 4. П'ята власна частота є обертоном другої власної частоти. Коливання є чисто пружними радіальними коливаннями. Суцільними лініями позначені напруження T_1 , штриховими — напруження T_5 . Ці напруження можуть бути вираховані за допомогою функцій Бесселя і служать додатковим способом верифікації результатів, отриманих запропонованим нами способом. Можна відзначити повний збіг результатів, отриманих двома описаними способами.

На рис. 2, б представлено розподіл переміщень u_1 та u_3 для другої та п'ятої власних частот циліндра із п'єзокераміки PZT 4. Суцільними лініями позначені переміщення u_1 , штриховими — переміщення u_3 . Можна відмітити характерну для обертонів властивість збільшення осциляції функції із зростанням номера обертону. На рис. 2, в представлено розподіл напружень T_3 та T_4 для третьої та четвертої власних частот циліндра із п'єзокераміки PZT 4. Четверта власна частота є обертоном третьої власної частоти. Коливання є електропружними по-

Рис. 1. Вплив виду електричних граничних умов на характер дисперсійних відношень

здовжніми. Суцільними лініями позначені напруження T_1 , штриховими – напруження T_5 . На рис. 2, з представлено розподіл переміщень u_1 та u_3 для третьої та четвертої власних частот циліндра із п'єзокераміки PZT 4. Суцільними лініями позначені переміщення u_1 , штриховими – переміщення u_3 . Можна також відзначити характерну для обертонів властивість збільшення осциляції функції із зростанням номера обертону.

На рис. 2, д представлено розподіл амплітуд переміщень за товщиною суцільного однорідного п'єзокерамічного циліндра для першої гілки $W(0)$. Суцільними лініями зображено амплітуди переміщень u_1 , а штриховими – амплітуди переміщень u_3 . Як видно з наведеного рисунка, при народженні ($k=0$) – це коливання поршневого типу. Зі зменшенням довжини хвилі коливання стають комбінованими, присутні рухи, як у напрямку осі циліндра, так і у радіальному напрямку. В короткохвильовому діапазоні розподіл переміщень за товщиною нагадує поверхневу хвилю “релеєвського” типу. Енергія руху локалізована біля зовнішньої поверхні циліндра. У цьому випадку лінії на рисунку широкі.

Далі розглянемо випадок, коли циліндр виготовлено з функціонально градієнтного п'єзокерамічного матеріалу. А саме, матеріал складається з двох компонент – сталі та п'єзокераміки. Тоді характеристики матеріалу змінюються по товщині циліндра наступним чином:

$$P(r) = (P_m - P_p)V(r) + P_p, \tag{16}$$

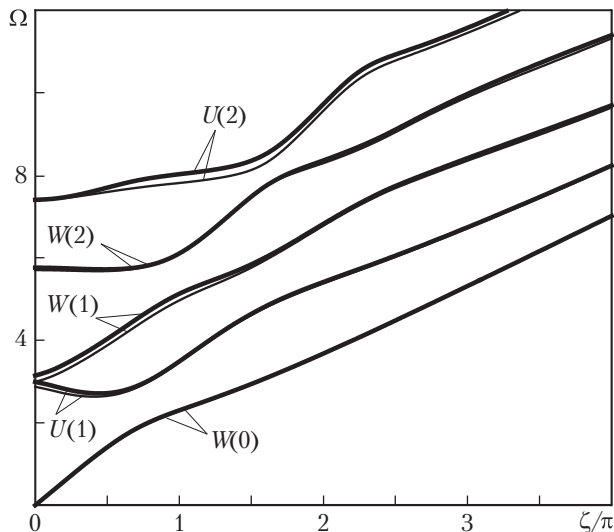
де $V(z)$ – об'ємна частка п'єзокераміки в загальному об'ємі ФГПМ,

$$V(r) = \left(\frac{r - R_0}{2h} + \frac{1}{2} \right)^n. \tag{17}$$

Підставляючи замість $P(r)$ у формулу (16) будь які модулі, що описують фізико-механічні властивості матеріалу, отримаємо відповідні значення для модулів неперервно неоднорідного п'єзокерамічного матеріалу (ФГПМ) [5].

Найбільший інтерес для нас представляє розподіл амплітуд для першої гілки $U(0)$. Справа в тому, що у випадку однорідного суцільного циліндра перша гілка у короткохвильовому діапазоні виходить на хвилю, яка поширюється без дисперсії. Подальший аналіз показує, що це поверхнева хвиля релеєвського типу (див. рис. 2, д)). У випадку ж неоднорідного суцільного циліндра навіть у короткохвильовій області існує дисперсія.

На рис. 3, а представлено розподіл переміщень u_1 та u_3 , напружень T_1 та T_5 (рис. 3, б) і електростатичного потенціалу Φ та діелектричної проникності D_1 (рис. 3, в) для першої гілки $U(0)$ циліндра з ФГПМ. Очевидним є те, що у короткохвильовій області ця хвиля не є поверхневою, механічна і електрична енергія зміщуються в зону більш м'якого матеріалу.



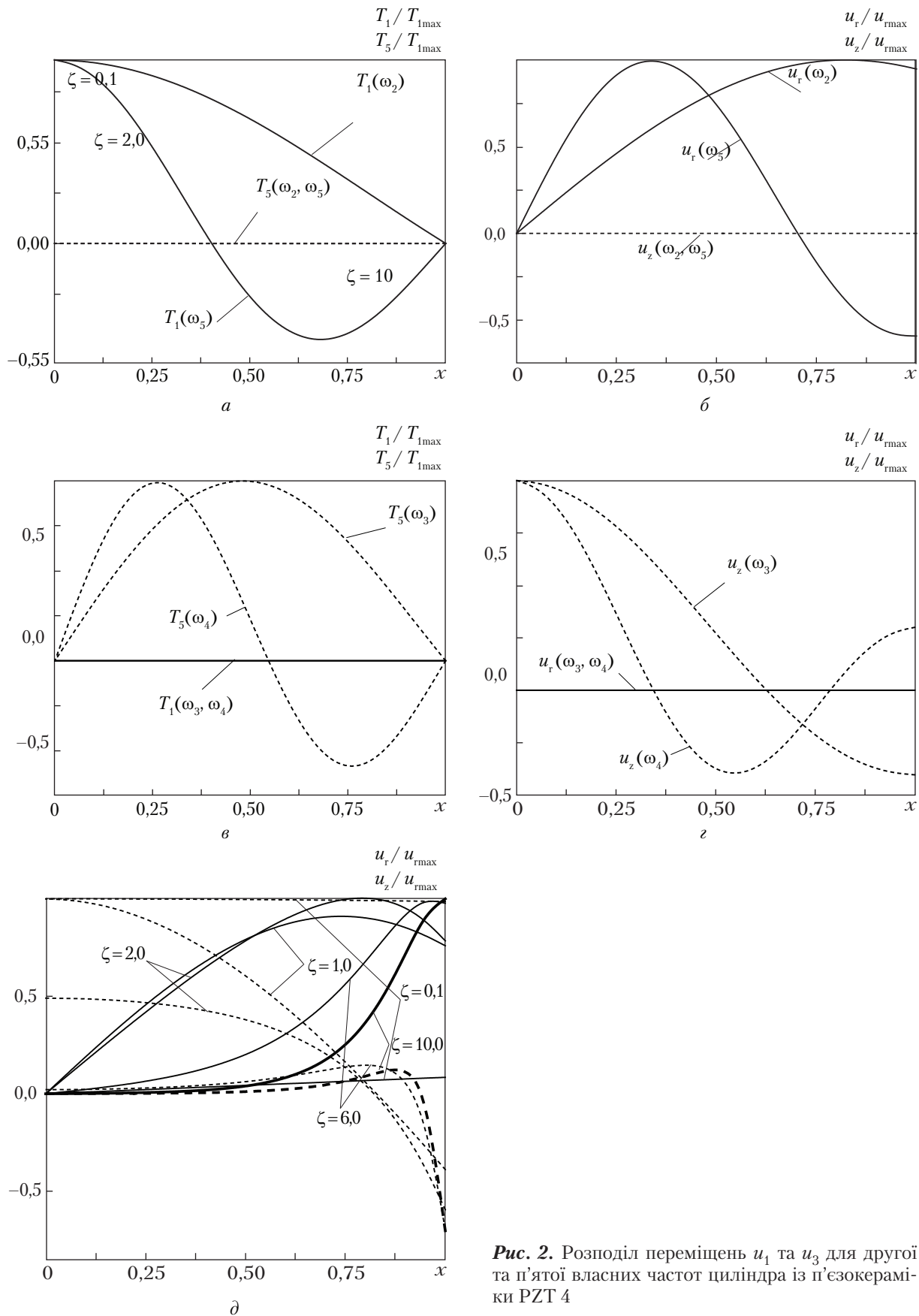


Рис. 2. Розподіл переміщень u_1 та u_3 для другої та п'ятої власних частот циліндра із п'єзокераміки PZT 4

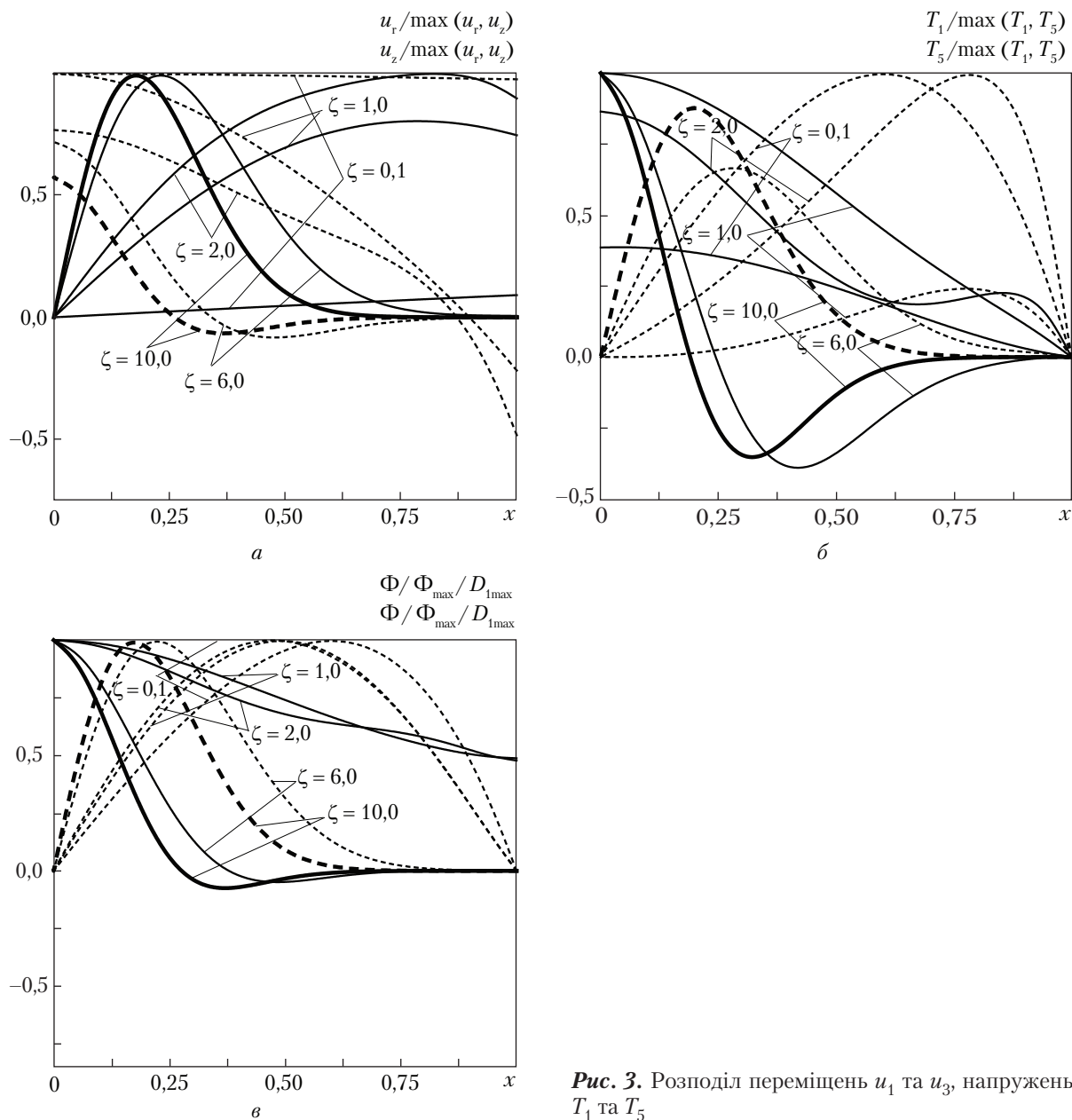


Рис. 3. Розподіл переміщень u_1 та u_3 , напружень T_1 та T_5

Висновки. Досліджено поширення вимушених хвиль у суцільних однорідних та неоднорідних п'єзокерамічних циліндричних тілах на основі просторової теорії електропружності. Представлено розв'язуючу систему диференціальних рівнянь у частинних похідних із змінними коефіцієнтами для випадку осьової поляризації п'єзокераміки. Сформульовано граничні умови в особливій точці суцільного п'єзокерамічного циліндра $r = 0$. Компоненти тензора напружень, вектора переміщень, електростатичного потенціалу та електричної індукції представлені у вигляді стоячих окружних хвиль і вимушених хвиль, що біжать в осьовому напрямку. Тривимірна система розв'язувальних рівнянь зводиться до крайової задачі,

яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Запропоновано дискретно-континуальний аналітичний чисельний підхід до вирішення задач теорії просторової електропружності процесів поширення хвиль у однорідних та неперервно неоднорідних п'єзокерамічних суцільних циліндричних тілах. Розв'язано осесиметричну задачу поширення вимушених акустоелектричних хвиль в осьовому напрямку у випадку осьової поляризації для однорідного та неоднорідного суцільного п'єзокерамічного циліндра. Представлено розподіл амплітуд переміщень, напружень, електричного потенціалу та діелектричної проникності по товщині циліндра.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Dai H.-I., Hong L., Fu Y.-M., Xiao X. Analytical solution for electromagnetothermoelastic behavior of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *Appl. Math. Model.* 2010. **34**, № 2. P. 343–357. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.04.008>
2. Grigorenko A.Y., Loza I.A. Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 4. P. 374–380. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0821-7>
3. Grigorenko A.Y., Loza I.A. Propagation of axisymmetric electroelastic waves in a hollow layered cylinder under mechanical excitation. *Int. Appl. Mech.* 2017. **53**, № 5. P. 562–567. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0837-z>
4. Grigorenko A.Y., Müller W.H., Grigorenko Y.M., Vlaiikov G.G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. In: General theory and applications of classical theory. Vol. I. Berlin: Springer, 2016.
5. Grigorenko A.Ya., Müller W.H., Loza I.A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. Springer, 2021. 227 p.
6. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Solid Cylinders with Different End Conditions. *Int. Appl. Mech.* 2006. **42**, № 6. P. 629–635. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0130-z>
7. Han X., Liu G.-R. Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart Mater. Struct.* 2003. **12**, № 6. P. 962–971. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/12/6/014>
8. Puzyrev V., Storozhev V.I. Wave propagation in axially polarized piezoelectric hollow cylinder of sector cross section. *J. Sound. Vib.* 2011. **330**, Iss. 18-19. P. 4508–4518.
9. Paul H.S. Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric β -quartz. *Arch. Mech. Stosow.* 1962. **14**, № 5. P. 127–134.
10. Puzyrev V. Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. *Int. J. Solids Struct.* 2010. **47**, Iss. 16. P. 2115–2122. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.04.011>
11. Shatalov M.Y., Every A.G., Yenwong-Faia A.S. Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material. *Int. J. Solids Struct.* 2009. **46**, № 3–4. P. 837–850. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.09.022>
12. Shul'ga N.A. Propagation of harmonic waves in anisotropic piezoelectric cylinders. Homogeneous piezoceramic waveguides. *Int. Appl. Mech.* 2002. **38**, № 4. P. 1440–1458. <https://doi.org/10.1023/A:1023205707153>

Надійшло до редакції 11.05.2022

REFERENCES

1. Dai, H.-I., Hong, L., Fu, Y.-M. & Xiao, X. (2010). Analytical solution for electromagnetothermoelastic behavior of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder. *Appl. Math. Model.*, 34, No. 2, pp. 343-357. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.04.008>
2. Grigorenko, A. Y. & Loza, I. A. (2017). Axisymmetric Acoustoelectric Waves in a Hollow Cylinder Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoelectric Material. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 4, pp. 374-380. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0821-7>

3. Grigorenko, A. Y. & Loza, I. A. (2017). Propagation of axisymmetric electroelastic waves in a hollow layered cylinder under mechanical excitation. *Int. Appl. Mech.*, 53, No. 5, pp. 562-567. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0837-z>
4. Grigorenko, A. Y., Müller, W. H., Grigorenko, Y. M. & Vlaiikov, G. G. (2016). Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. In: *General theory and applications of classical theory. Vol. I.* Berlin: Springer.
5. Grigorenko A. Ya., Müller, W. H. & Loza, I. A. (2021). *Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies.* Springer.
6. Grigorenko, Ya. M., Grigorenko, A. Ya. & Rozhok, L. S. (2006). Solving the Stress Problem for Solid Cylinders with Different End Conditions. *Int. Appl. Mech.*, 42, No. 6, pp. 629-635. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0130-z>
7. Han, X. & Liu, G.-R. (2003). Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart. Mater. Struct.*, 12, No. 6, pp. 962-971. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/12/6/014>
8. Puzyrev, V. & Storozhev, V.I. (2011). Wave propagation in axially polarized piezoelectric hollow cylinder of sector cross section. *J. Sound. Vib.*, 330, Is. 18-19, pp. 4508-4518.
9. Paul, H. S. (1962). Torsional vibration of a circular cylinder of piezoelectric β -quartz. *Arch. Mech. Stosow.*, 14, No. 5, pp. 127-134.
10. Puzyrev, V. (2010). Elastic waves in piezoceramic cylinders of sector cross-section. *Int. J. Solids. Struct.*, 47, Is. 16, pp. 2115-2122. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.04.011>
11. Shatalov, M. Y., Every, A. G. & Yenwong-Faia, A. S. (2009). Analysis of non-axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material. *Int. J. Solids. Struct.*, 46, No. 3-4, pp. 837-850. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.09.022>
12. Shul'ga, N. A. (2002.) Propagation of harmonic waves in anisotropic piezoelectric cylinders. Homogeneous piezoceramic waveguides. *Int. Appl. Mech.*, 38, pp. 1440-1458. <https://doi.org/10.1023/A:1023205707153>

Received 11.05.2022

A.Ya. Grigorenko¹, [https:// orcid.org/0000-0002-4109-2672](https://orcid.org/0000-0002-4109-2672)

I.A. Loza², [https:// orcid.org/0000-0002-2678-6908](https://orcid.org/0000-0002-2678-6908)

S.O. Sperkach³, [https:// orcid.org/0000-0003-3168-6300](https://orcid.org/0000-0003-3168-6300)

A.D. Bezuglaya³, [https:// orcid.org/0000-0001-8083-3210](https://orcid.org/0000-0001-8083-3210)

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

² National Transport University, Kyiv

³ Technical center of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: ayagrigenko1991@gmail.com, lozaigor1956@gmail.com,

svetlana@nasu.kiev.ua, bezuglaya.anna24@gmail.com

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF PROPAGATION OF FORCED ELECTROELASTICITY WAVES IN A SOLID PIEZOCERAMIC CYLINDER

The propagation of forced axisymmetric waves in a solid homogeneous and inhomogeneous piezoceramic cylinder with axial polarization based on the linear theory of elasticity and the linear electromechanical coupling is investigated. A mechanical load to the lateral surface of the cylinder is applied and it is free of the electrodes. The case of the continuously inhomogeneous piezoceramic cylinder material is considered. The boundary conditions at singular point of a solid piezoceramic cylinder are formulated. The discretely continual analytical numerically approach to solve of the problems of the forced wave propagation in the piezoceramic solid cylindrical bodies is proposed. The three-dimensional problem of the theory of electroelasticity in the partial derivatives (by presenting components of the elasticity tensor, component of displacement vectors, electrical induction and electrostatic potential by running waves in the axial direction) is reduced to the boundary value problems for the system of the ordinary differential equations. The one-dimensional problem is solved by a stable method of discrete orthogonalization. The kinematic analysis of the propagation of forced electroelastic waves in a solid piezoceramic homogeneous and inhomogeneous cylinder is carried out

Keywords: forced wave propagation, axisymmetric problem, piezoelectric solid cylinder, numerical method, nonhomogeneous material, kinematic characteristics.