

Член-корреспондент НАН Украины **А. И. Шевченко, А. С. Миненко, А. С. Гололобова**

## Моделирование сложных теплофизических систем с применением нечеткой логики

*Исследуется один класс задач типа Стефана, имеющий место в теплофизике. Построено приближенное решение этой задачи. Управление процессом кристаллизации осуществляется с использованием нечеткой логики.*

**Двумерная модель кристаллизации с конвекцией.** Процессы кристаллизации, которые встречаются в природе, сопровождаются конвективным перемешиванием в жидкой фазе. Ниже рассматривается постановка задачи, в которой конвекция вызвана наличием заданного вихря интенсивности  $\mu$ . Исследование состоит в приближенном анализе свободной границы от интенсивности  $\mu$ . Рассмотрим стационарный случай в полуполосе  $D = \{-1 < x < 1, H < y < 0\}$ . Обозначим через  $\gamma$  кривую, отделяющую жидкую фазу  $D_\gamma^+$  от твердой  $D_\gamma^-$ , при этом концы  $\gamma$  лежат на вертикалях  $x = \pm 1$ . Обе области  $D_\gamma^+$  и  $D_\gamma^-$  предполагаются односвязными и симметричными относительно оси  $y$ . Пусть  $\psi(x, y)$  — функция тока, которая удовлетворяет условиям:

$$\Delta\psi = \mu, \quad (x, y) \in D_\gamma^+, \quad \mu = \text{const} > 0, \quad \psi = 0, \quad (x, y) \in \partial D_\gamma^+.$$

Тут  $\mu$  считается достаточно малым численным параметром. Требуется определить, кроме функции тока  $\psi(x, y)$ , тройку  $(u^\pm(x, y), \gamma)$  по следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lambda\Delta u^+ - \psi_y u_x^+ + \psi_x u_y^+ &= 0, & (x, y) \in D_\gamma^+, & \quad \lambda = \text{const}, \\ u^+(x, 0) &= \vartheta, & -1 \leq x \leq 1, & \quad \vartheta = \text{const} > 1, \\ u_x^\pm \pm \omega_0^\pm u^\pm &= 0, & x = \pm 1, & \quad (x, y) \in \Gamma_\gamma^+ \cup \Gamma_\gamma^-, \\ \Delta \bar{u} &= 0, & (x, y) \in D_\gamma^-, & \quad \bar{u}(x, H) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \bar{u}(x, y) &= u^+(x, y) = 1, & |\nabla u^-|^2 - k^2 |\nabla u^+|^2 &= 0, \quad (x, y) \in \gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\Gamma_\gamma^+ = \partial D_\gamma^+ \cap \{x = \pm 1\}$ ;  $\Gamma_\gamma^- = \partial D_\gamma^- \cap \{x = \pm 1\}$ ;  $\omega_0^\pm$  — числа Нусельта.

Предложен метод изучения нелинейной задачи (1), состоящий в разложении решения в ряд по степеням малого параметра  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \psi(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \psi_k(x, y), & u^\pm(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^\pm(x, y), \\ y(x; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k y_k(x), & \gamma : y &= y(x; \mu), \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Изучим теперь нулевые и первые приближения задачи (1).

**Приближенное решение задачи (1).** Нулевое приближение  $(u_o^\pm(x, y), \gamma_o)$  задачи (1) ищем из условия минимума функционала

$$Y(u^+, u^-, \gamma_0) = \iint_{D_{\gamma_0}^-} [u_x^{-2} + u_y^{-2}] dx dy + k^2 \iint_{D_{\gamma_0}^+} [u_x^{+2} + u_y^{+2}] dx dy + \\ + k^2 \omega_0^+ \int_{\Gamma_\gamma^+} [u^{+2} - 1] dy + \omega_0^- \int_{\Gamma_\gamma^-} [u^{-2} - 1] dy$$

на соответствующем множестве допустимых функций в классе  $u_y^+ > 0$  в  $D_\gamma^\pm$ . Этот функционал может быть представлен следующим образом:

$$I(y_1, y_2) = \iint_{\Delta_1} \frac{1 + y_{1x}^2}{y_{1u}} dx du + k^2 \iint_{\Delta_2} \frac{1 + y_{2x}^2}{y_{2u}} dx du + \\ + \omega_0^+ k^2 \int_1^\vartheta (u^2 - 1) [y_{2u}(1, u) + y_{2u}(-1, u)] du + \omega_0^- \int_0^1 (u^2 - 1) [y_{1u}(1, u) + y_{1u}(-1, u)] du,$$

где  $\Delta_1 = (-1 < x < 1, 0 < u < 1)$ ,  $\Delta_2 = (-1 < x < 1, 1 < u < \vartheta)$ ,  $y_1(x, u)$  и  $y_2(x, u)$  — решения уравнений  $u_1(x, y) - u_1 = 0$ ,  $u_2(x, y) - u_2 = 0$ . Функционал  $I(y_1, y_2)$  минимизируется методом Ритца [1].

Далее пусть  $u(x, y) = u_1^+(x, y)$  при  $(x, y) \in \overline{D}_{\gamma_0}^+$ , и  $u(x, y) = u_1^-(x, y)$ , если  $(x, y) \in \overline{D}_{\gamma_0}^-$ , где  $u(x, y)$  — решение следующей задачи:  $\Delta u = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ ,  $u(x, 0) = 0$ ,  $u(x, H) = 0$ ,  $u_x(0, y) = 0$ ,  $H \leq y \leq 0$ ,  $u_x + \omega_0^\pm u = 0$ ,  $x = 1$ ,  $(x, y) \in \partial D_\gamma^\pm \setminus \gamma$ . Справедливо такое утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $\mu$  — достаточно малая величина. Тогда справедливо представление

$$y(x; \mu) = y_0(x) - \mu \frac{u_1^\pm(x, y)}{u_{0y}^\pm(x, y)} + o(\mu), \quad (x, y) \in \gamma_0,$$

где  $y_0(x)$  — решение уравнения  $u_0(x, y) - 1 = 0$  в классе функций  $u_{oy} > 0$  в  $D$ .

**Пространственная модель кристаллизации.** Пусть  $\Omega$  — заданная область в  $R^3$ , представляющая собой цилиндр  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, x_3 < 0\}$ , и пусть  $Q$  — боковая поверхность  $\Omega$ . Обозначим через  $\Gamma$  достаточно гладкую поверхность (поверхность кристаллизации, отделяющую жидкую часть металла  $D_\gamma^+$  от твердой  $D_\gamma^-$ ). Поверхность  $\Gamma$  разбивает боковую поверхность  $Q$  на два куса  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , т. е.  $Q = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . Задача Стефана при наличии конвективных движений в жидкой фазе состоит в нахождении поля скоростей в жидкой фазе  $\vec{V}(x) = (V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ , давления  $p(x)$ , распределения температур  $u^\pm(x)$  и свободной поверхности по следующим условиям:

$$\lambda(\vec{\nabla} \vec{\nabla}) u^+(x) = k \nabla^2 u^+(x), \quad x \in \Omega_\gamma^+, \\ \nabla^2 \bar{u}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\gamma^-, \\ (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) \vec{V}(x) + \nabla p(x) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V}(x) + \vec{f}(u^+), \quad \text{div } \vec{V}(x) = 0, \quad (2)$$

$$x \in \Omega^+, \quad \vec{V}|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} u^+|_{x \in H} = h(x),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} u^\pm + \omega_0^\pm u^\pm \right] = 0, \quad u^+ = u^- = 1, \quad \frac{\partial u^-}{\partial u} - k \frac{\partial u^+}{\partial u} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\Omega^\pm$  — области соответственно жидкой и твердой фаз;  $H$  — верхнее основание цилиндра  $\Omega$ .

В задаче (2) параметры  $k, \lambda, \text{Re}$  допускаются постоянными величинами,  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ , функция  $\vec{f}(u^+)$  принадлежит классу  $C^2(R^1)$ ,  $\vec{f}'(u)$  ограничена в  $R^1$ . При малых числах Рейнольдса  $\text{Re}$  задача (2) имеет решение, при этом  $u^\pm \in C^{3+\alpha}(\bar{\Omega}^\pm)$ ,  $\vec{V}(x) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}^+)$ , а  $\Gamma$  принадлежит классу  $C^{3+\alpha}$  [2].

**Приближенное решение задачи (2).** Пусть  $u_0^\pm(x)$  — решение стационарной задачи (2) без конвекции в области  $\Omega_0^\pm$  с теми же условиями из (2) при  $\text{Re} = 0$ , а  $\Gamma_0$  — свободная поверхность. Для точек поверхности  $\Gamma_0$  введем криволинейные координаты  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ . Свободную поверхность  $\Gamma$  будем искать в виде  $\Gamma = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega), x(\omega) \in \Gamma_0\}$  с некоторой функцией  $\rho(\omega)$  класса  $C^{3+\alpha}(\Gamma_0)$ . Допустим, что неизвестные величины нашей задачи можно искать в виде  $u^\pm(x; \text{Re}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Re})^k u_k^\pm(x)$ ,  $V_i(x; \text{Re}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Re})^k V_{ik}(x)$ ,  $p(x; \text{Re}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\text{Re})^k p_k(x)$ ,  $p(\omega; \text{Re}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\text{Re})^k p_k(\omega)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Справедливо утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $u_1^\pm(x)$  и  $u_2^\pm(x)$  — решения следующих задач:

$$(\vec{V}_1 \nabla) \vec{V}_1 + \nabla p_1 = \nabla^2 \vec{V}_2 + \vec{f}'(u_0^+) u_1^+, \quad \text{div } \vec{V}_2 = 0, \quad x \in \Omega_0^+, \quad \vec{V}_2|_{\partial\Omega_0^+} = 0,$$

$$\lambda (\vec{V}_1 \nabla) u_1^+ + \lambda (\vec{V}_2 \nabla) u_0^+ = \nabla^2 u_2^+, \quad x \in \Omega_0^+; \quad \nabla^2 u_2^- = 0,$$

$$x \in \Omega_0^-; \quad \left( \frac{\partial u_2^\pm}{\partial n} + \omega_0^\pm u_2^\pm \right) \Big|_{x \in \Gamma^+ \cup \Gamma^-} = 0, \quad \frac{\partial u_2^\pm}{\partial n} = 0, \quad x \in H;$$

$$\nabla^2 u_1(x) = F_1(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_H = 0, \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial n} + \omega_0^\pm u_1 \right) \Big|_{x \in \Gamma} = 0,$$

где  $F_1(x) = \lambda (\vec{V}_1 \nabla) u_0^+$  при  $x \in \bar{\Omega}_0^+$  и  $F_1(x) = 0$  при  $x \in \bar{\Omega}_0^-$ . Тогда при малых числах  $\text{Re}$  справедлива формула

$$\Gamma : x = x(\omega) - \vec{n}(\omega) \text{Re} \frac{u_1^\pm(x(\omega))}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} - \vec{n}(\omega) (\text{Re})^2 \frac{u_2^\pm(x(\omega)) - f_1(x(\omega))}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|}, \quad x(\omega) \in \Gamma_0.$$

**Управление процессом кристаллизации с применением нечеткой логики.** Рассмотрим процесс кристаллизации металла, который имеет место в спецметаллургии [3]. Пусть  $u^*$  — температура, при которой происходит отделение слитка от стенок кристаллизатора. Эта температура будет достигаться при воздействии потоков мощности  $w^1, w^2, w^3$ , причем поток  $w^3$  равномерно распределен в центре слитка. Далее рассматриваются все факторы  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , которые влияют на процесс кристаллизации, а также условия  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , при которых происходит появление нового слитка. Затем строится нечеткое управление с помощью метода Мамдани, который позволяет осуществить процесс управления в задаче кристаллизации. Числовые параметры, участвующие в построении управления задачи, выбираются из [3].

1. *Миненко А. С.* Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546–1556.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
3. *Патон Б. Е.* Избранные труды. – Киев: Изд-во Ин-та электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины, 2008. – 893 с.

*Институт информатики и искусственного  
интеллекта ДонНТУ, Донецк*

*Поступило в редакцию 26.02.2013*

Член-корреспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко,  
А. С. Гололобова**

### **Моделювання складних теплофізичних систем із застосуванням нечіткої логіки**

*Досліджується один клас задач типу Стефана, який має місце в теплофізиці. Побудовано наближений розв'язок цієї задачі. Управління цим процесом кристалізації здійснюється з використанням нечіткої логіки.*

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko,  
A. S. Gololobova**

### **Simulation of complex thermal physical systems with the use of a fuzzy logic**

*The Stephan problem is investigated. The approximate solution is constructed. The control over the process of crystallization with using a fuzzy logic is realized.*