Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2014

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужна**

Аналіз обчислювальних можливостей інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності

Досліджуються деякі аспекти чисельної реалізації інтерлінаційного методу скінченних елементів розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для плоских областей складної форми. Дослідження пропонується проводити тестуванням цього методу з використанням точних розв'язків, спосіб побудови яких наведено в роботі. Інтерлінаційний метод скінченних елементів дозволяє зводити нестаціонарну задачу теплопровідності до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь меншого порядку, ніж у класичному методі скінченних елементів (МСЕ).

Актуальність теми. МСЕ є одним із методів, що найчастіше застосовуються для розв'язання реальних нестаціонарних задач з розподілу температури в областях складної форми. Практика вимагає розв'язання задач з великою кількістю елементів, а отже, і невідомих функцій $C_k(t)$, $k = \overline{1, M}$, що визначають сліди $C_k(t) = u(x_k, y_k, t)$, $k = \overline{1, M}$, наближеного розв'язку $u(x, y, t)$ у вузлах $A_k(x_k, y_k)$ елементів розбиття. Тому актуальною є розробка та дослідження нових методів розв'язання нестаціонарних задач теплопровідності, які використовують меншу кількість елементів для досягнення тієї ж точності $\varepsilon > 0$.

Аналіз літературних джерел. У 1990 р. вперше було запропоновано обчислювальні схеми розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для двовимірних областей на основі використання інтерлінації функцій [1]. У 2000 р. запропонований метод був досліджений у випадку задачі з трьома просторовими змінними [2]. При застосуванні МСЕ кількість елементів може досягати кількох сотень і навіть тисяч [3, 4]. У роботах [5–9] розглянуто приклади розв'язання задачі стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності для областей, що мають форму прямокутника, кутка, швелера та Т-подібної області. Але на даний час відсутні публікації з аналізом можливостей вказаного методу.

Основні твердження роботи. Дано аналіз можливостей інтерлінаційного методу скінченних елементів на основі результатів обчислювального експерименту. Для обмеженої області $G \subset R^2$ будемо розв'язувати нестаціонарну крайову задачу

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q(x,y)u = f(x,y,t),$$
$$(x,y) \in G, \qquad t > 0, \tag{1}$$

при таких початковій і граничній умовах:

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G, \qquad G \subseteq \Pi, \qquad \Pi = [a,b] \times [c,d], \tag{2}$$

$$u(x,y,t)|_{\partial G} = \phi(x,y,t)|_{\partial G}. \tag{3}$$

Вважаємо, що $p_1(x,y)$, $p_2(x,y) \in C^1(G)$, $q(x,y) \in C(G)$, $f(x,y,t) \in C(G \times R^+)$, $R^+ = [0,\infty)$ і розв'язок поставленої задачі задовольняє умови:

1) $u(x,y,t)$ має неперервні похідні до 2-го порядку за змінними x та $yu^{(p,q,0)}(x,y,t) \in C(G \times R^+)$, $\forall\, t \geqslant 0$, $0 \leqslant p,\ q \leqslant 2$;

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(G \times R^+)$.

Крім того, вважаємо, що гранична функція $\varphi(x,y,t)$ і початкова функція $u_0(x,y)$ задовольняють співвідношення $\varphi(x,y,0)|_{\partial G} = u_0(x,y)|_{\partial G}$.

Замінимо задачу (1)–(3) відповідною задачею з однорідними початковою і граничною умовами. Для цього введемо замість функції $u(x,y,t)$ функцію $v(x,y,t)$ таким чином: $u(x,y,t) = v(x,y,t) + \varphi(x,y,t) + u_0(x,y) - \varphi(x,y,0)$.

Функція $v(x,y,t)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння і однорідні початкову і граничну умови:

$$Lv(x,y,t) = f(x,y,t) - L\varphi(x,y,t) - L(u_0(x,y) - \varphi(x,y,0)),$$

$$v(x,y,0) = 0, \qquad v(x,y,t)|_{\partial G} = 0,$$

$$u(x,y,t) \in C^{2,2,1}(G \times R^+) = \{v\colon v^{(p,q,1)}(x,y,t) \in C(G \times R^+),\ 0 \leqslant p,\ q \leqslant 2\}.$$

Якщо u — побудована вказаним методом функція, то вона є точним розв'язком відповідної початково-крайової задачі. Далі вважаємо початкову та граничну умови однорідними.

Викладемо по кроках алгоритм знаходження наближеного розв'язку [1, 10].

К р о к 1 . Розіб'ємо область G на елементи прямими $x = x_k$, $k = \overline{0,M}$, та $y = y_l$, $l = \overline{0,N}$. В результаті область G розіб'ється на елементи таких типів:

прямокутні елементи $\Pi_{ij}^0 = \{(x,y)\colon x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}\}$, $i = \overline{0,M-1}$, $j = \overline{0,N-1}$; прямокутні елементи Π_{ij}^r, $r = 1,\ldots,4$, з однією криволінійною стороною, яка належить границі ∂G. Так, $\Pi_{ij}^1 = \{(x,y)\colon x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1},\ y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}(x),\ y_{j+1}(x) > y_j\}$. Аналогічний вигляд мають Π_{ij}^2, Π_{ij}^3, Π_{ij}^4;

трикутні елементи T_{ij}^r, $r = 1,\ldots,4$, з однією, взагалі кажучи, криволінійною стороною, яка належить границі ∂G. Елементи T_{ij}^2, T_{ij}^3, T_{ij}^4 мають вигляд, аналогічний $T_{ij}^1 = \{(x,y)\colon x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, y_j \leqslant y \leqslant \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0, \eta_{j+1}(x_{i+1}) = y_j, \eta_{j+1}(x_i) = y_{j+1}\}$.

К р о к 2. Будуємо в кожному із вказаних елементів оператор інтерлінації $OF(x,y,t)$ функції $F(x,y,t)$ на Π_{ij}^0 або Π_{ij}^r, або $T_{i,j}^r$ у вигляді:

$$OF(x,y,t)=\begin{cases} U_{ij}F(x,y,t), & (x,y)\in\Pi_{ij}^0,\\ V_{ij}^rF(x,y,t), & (x,y)\in\Pi_{ij}^r, \quad r\in\{1,2,3,4\},\\ W_{ij}^rF(x,y,t), & (x,y)\in T_{ij}^r, \quad r\in\{1,2,3,4\},\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_{ij}F(x,y,t)&=\sum_{\mu=i}^{i+1}\sum_{s=0}^{\lambda}h_{\mu-i,s}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x_{i+1}-x_i)^s\phi_{\mu,s}(y,t)+\\ &+\sum_{\nu=j}^{j+1}\sum_{p=0}^{\lambda}h_{\nu-j,p}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right)(y_{j+1}-y_j)^p\psi_{\nu,p}(x,t)-\\ &-\sum_{\mu=i}^{i+1}\sum_{s=0}^{\lambda}\sum_{\nu=j}^{j+1}\sum_{p=0}^{\lambda}h_{\mu-i,s}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x_{i+1}-x_i)^s h_{\nu-j,p}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}\right)\times\\ &\quad\times(y_{j+1}-y_j)^pD_{\mu,s,\nu,p}(t), \end{aligned} \tag{5}$$

де $\lambda\in\{1,\ldots,5\}$; допоміжні функції $h_{r,s}(u)$, $r,s\in\{0,1\}$ мають такі властивості: $h_{r,s}^{(p)}(q)=$ $=\delta_{r,q}\delta_{s,p}$, r, s, p, $q\in\{0,\ldots,\lambda\}$; $\delta_{s,p}$ — символ Кронекера. Тоді

$$\left.\frac{\partial^\alpha U_{ij}F}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_k}=\varphi_{k,\alpha}(y,t),\qquad \alpha=\overline{0,\lambda},\qquad k=\overline{i,i+1},$$

$$\left.\frac{\partial^\beta U_{ij}F}{\partial y^\beta}\right|_{y=y_\ell}=\psi_{\ell,\beta}(x,t),\qquad \beta=\overline{0,\lambda},\qquad \ell=\overline{j,j+1}.$$

Вважатимемо, що

$$\left.\frac{\partial^p\varphi_{i,s}}{\partial y^p}\right|_{y=y_j}=\left.\frac{\partial^s\psi_{j,p}}{\partial x^s}\right|_{x=x_i}=D_{i,s,j,p}(t),\quad (x_i,y_j)\in G,\quad 0\leqslant s,\quad p\leqslant\lambda,\quad \lambda\in\{1,2\},$$

$$\begin{aligned} V_{ij}^1F(x,y,t)&=\sum_{\mu=i}^{i+1}\sum_{s=0}^{1}h_{\mu-i,s}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x_{i+1}-x_i)^s\phi_{\mu,s}(y,t)+\\ &+\sum_{\nu=j}^{j+1}\sum_{p=0}^{1}h_{\nu-j,p}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}\right)(y_{j+1}(x)-y_j)^p\psi_{\nu,p}(x,t)-\\ &-\sum_{\mu=i}^{i+1}\sum_{s=0}^{1}\sum_{\nu=j}^{j+1}\sum_{p=0}^{1}h_{\mu-i,s}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x_{i+1}-x_i)^s h_{\nu-j,p}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}\right)\times\\ &\quad\times(y_{j+1}(x)-y_j)^pD_{i,s,j,p}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Для виконання умови $V_{ij}^1F(x,y_{j+1}(x),t)=0$ потрібно, щоб $\psi_{j+1,0}(x,t)\equiv 0$.

Теорема 1. *Оператор* $V_{ij}^1 F(x,y,t)$ *інтерлінує функцію* $F(x,y,t) \in C^1\Big(\prod\limits_{i,j}^{1}\Big)$ *та її похідні до порядку* λ *включно за змінними* x *та* y *на границі чотирикутника* Π_{ij}^1 *з однією криволінійною стороною, тобто,*

$$\begin{aligned}
&V_{ij}^1 F(x,y,t) = F(x,y,t), \qquad (x,y) \in \partial \prod_{ij}^{1},\\
&\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} V_{ij}^1 F(x,y,t)\bigg|_{x=x_p} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} F(x,y,t)\bigg|_{x=x_p},\\
&\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} V_{ij}^1 F(x,y,t)\bigg|_{y=y_j} = \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} F(x,y,t)\bigg|_{y=y_j},\\
&\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} V_{ij}^1 F(x,y,t)\bigg|_{y=y_{j+1}(x)} = \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} F(x,y,t)\bigg|_{y=y_{j+1}(x)},\\
&\alpha = \overline{0,1}, \qquad p = i, i+1, \qquad \beta = \overline{0,1} \qquad \forall\, t \in [0,\infty).
\end{aligned}$$

Нехай h_{1s}, h_{2s}, $h_{is}^{(p)}(x_j) = \delta_{ij}\delta_{sp}$, $0 \leqslant s,p \leqslant 2$ *— базисні поліноми 3-го степеня поліноміальної двоточкової ермітової інтерполяції функції* $F(x,y,t)$. *За допомогою операторів, аналогічних* $EF(x,y,t) = \sum\limits_{k=1}^{2}\sum\limits_{s=0}^{1} F^{(s)}(x_k,y,t) h_{ks}(x)$, *будуємо оператори ермітової інтерлінації функції* $F(x,y,t)$ *трьох змінних:*

$$\begin{aligned}
E_{ij}^1 F(x,y,t) &= \sum_{p=0}^{1} F^{(p,0)}(x_i,y,t) h_{1,p}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}(y)-x_i}\right)\frac{(x_{i+1}(y)-x_i)^p}{p!} +\\
&+ \sum_{p=0}^{1} F^{(p,0)}(x_{i+1}(y),y,t) h_{2,p}\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}(y)-x_i}\right)\frac{(x_{i+1}(y)-x_i)^p}{p!},\\
E_{ij}^2 F(x,y,t) &= \sum_{s=0}^{1} F^{(0,s)}(x,y_j,t) h_{1,s}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}\right)\frac{(y_{j+1}(x)-y_j)^s}{s!} +\\
&+ \sum_{s=0}^{1} F^{(0,s)}(x,y_{j+1}(x),t) h_{2,s}\left(\frac{y-y_j}{y_{j+1}(x)-y_j}\right)\frac{(y_{j+1}(x)-y_j)^s}{s!}.
\end{aligned}$$

Тоді оператор інтерлінації функції $F(x,y,t)$ *разом з її частинними похідними до порядку* λ *за змінними* X *та* Y *на всіх сторонах трикутника* T_{ij}^1 *можна записати у вигляді*

$$T_{ij}^1 F(x,y,t) = (E_{ij}^1 + E_{ij}^2 - E_{ij}^1 E_{ij}^2) F(x,y,t), \qquad (x,y) \in T_{ij}^1.$$

Теорема 2. *Оператор* $T_{ij}^1 F(x,y,t)$ *має такі властивості:*

$$\frac{\partial^\alpha T_{ij}^1 F(x,y,t)}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=x_i} = \frac{\partial^\alpha F(x,y,t)}{\partial x^\alpha}\bigg|_{x=x_i},$$

$$\left.\frac{\partial^\alpha T^1_{ij}F(x,y,t)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_{i+1}(y)} = \left.\frac{\partial^\alpha F(x,y,t)}{\partial x^\alpha}\right|_{x=x_{i+1}(y)},$$

$$\left.\frac{\partial^\beta T^1_{ij}F(x,y,t)}{\partial y^\beta}\right|_{y=y_j} = \left.\frac{\partial^\beta F(x,y,t)}{\partial y^\beta}\right|_{y=y_j},$$

$$\left.\frac{\partial^\beta T^1_{ij}F(x,y,t)}{\partial y^\beta}\right|_{y=y_{j+1}(x)} = \left.\frac{\partial^\beta F(x,y,t)}{\partial y^\beta}\right|_{y=y_{j+1}(x)},$$

$\alpha = \overline{0,1}$, $\beta = \overline{0,1}$ *всюди, за виключенням кутових точок.*

Аналогічні твердження можна написати також для T^r_{ij}, $r = \overline{2,4}$.

Теорема 3. *Нехай оператори* $\Pi^r_{ij}F(x,y,t)$, $r = \overline{0,4}$, *інтерлінують* $F(x,y,t)$ *на сторонах чотирикутників* $\Pi^r_{ij} \subset G$, *а оператори* $T^r_{ij}F(x,y,t)$, $r = \overline{1,4}$, *— на сторонах трикутників* $T^r_{ij} \subset G$ *з криволінійною гіпотенузою. Тоді оператор*

$$O_GF(x,y,t) = \begin{cases} \prod\limits_{ij}^{r} F(x,y,t), & (x,y) \in \Pi^r_{ij}, \quad r = 0 \vee 1 \vee \ldots \vee 4, \\ T^r_{ij}F(x,y,t), & (x,y) \in T^r_{ij}, \quad r = 1 \vee \ldots \vee 4, \end{cases} \qquad \forall\, t \geqslant 0$$

при умовах, що $M_{i,j+1} = M(x_i, y_{j+1}(x_i))$, $M_{i+1,j} = M(x_{i+1}(y_j), y_j)$,

$$\lim_{(x,y)\to M_{i+1,j}} O_GF(x,y,t) = F(x_{i+1}(y_j), y_j, t),$$

$$\lim_{(x,y)\to M_{i,j+1}} O_GF(x,y,t) = F(x_i, y_{j+1}(x_i), t),$$

$$\lim_{(x,y)\to M_{i+1,j}} \frac{\partial}{\partial x} O_GF(x,y,t) = \left.\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,t)\right|_{M_{i+1,j}},$$

$$\lim_{(x,y)\to M_{i+1,j}} \frac{\partial}{\partial y} O_GF(x,y,t) = \left.\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,t)\right|_{M_{i+1,j}},$$

$$\lim_{(x,y)\to M_{i,j+1}} \frac{\partial}{\partial x} O_GF(x,y,t) = \left.\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,t)\right|_{M_{i,j+1}},$$

$$\lim_{(x,y)\to M_{i,j+1}} \frac{\partial}{\partial y} O_GF(x,y,t) = \left.\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,t)\right|_{M_{i,j+1}},$$

інтерлінує функцію $F(x,y,t)$ *на прямих* $x = x_k \in [a,b]$ *та* $y = y_\ell \in [c,d]$, *а також на границі* ∂G: $O_GF(x,y,t) = F(x,y,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}O_GF(x_k,y,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}F(x_k,y,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}O_GF(x,y_j,t) = \dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y_j,t)$. *При цьому* $O_GF(x,y,t) \in C^1(G)\ \forall\, F(x,y,t) \in C^{2,2,1}(G)\ \forall\, t \geqslant 0$, $O_GF(x,y,t) \in W^1_2(G)\ \forall\, t \geqslant 0$.

К р о к 3. Для побудови наближеного розв'язку інтерлінаційним МСЕ замінюємо невідомі функції $\varphi_{\mu,s}(x,t)$ та $\psi_{\nu,p}(y,t)$ сплайнами 1-го степеня:

$$\varphi_{\mu,s}(x,t) = \sum_{i=0}^{M^2} A_{i,\mu s}(t) h_i(x), h_i(x) = h(x, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}).$$

Для випадку рівномірного розбиття $x_k = a + k(b-a)/n$, $y_\ell = c + \ell(d-c)/n$, $k, \ell = \overline{0,n}$, $h_k(x) = h(nx-k)$, $h_\ell(y) = h(ny-\ell)$, де $h(\xi) = 2^{-1}(|\xi+1| - 2|\xi| + |\xi-1|)$, наближений розв'язок подається у вигляді:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j'=1}^{n^2-1} u_{kn,j'}(t)h(nx-k)h(n^2y-j') +$$
$$+\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{i'=1}^{n^2-1} u_{i',\ell n}(t)h(n^2x-i')h(ny-\ell) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} u_{kn,\ell n}h(nx-k)h(ny-\ell), \tag{7}$$

де $u_{ij}(t)$, $(i,j) \in J$ — шукані, $J = \{(i,j),(i',\ell),(k,j')\colon (i/n, j/n) \in G,\ (i'/n^2, \ell/n^2) \in G,\ (k/n^2, j'/n^2) \in G\}$. Для їх знаходження розв'язується така система диференціальних рівнянь:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn,j'}\right)(t) + [u, \varphi_{kn,j'}](t) = (f, \varphi_{kn,j'})(t)$$
$$(j' = \overline{1, n^2-1};\ j' \neq \ell n;\ k, \ell = \overline{1, n-1}, (k, j') \in J), \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_j}, \varphi_{i',\ell n}\right)(t) + [u, \varphi_{i',\ell n}](t) = (f, \varphi_{i',\ell n})(t)$$
$$(i' = \overline{1, n^2-1}; i' \neq kn;\ k, \ell = \overline{1, n-1},\ (i', \ell) \in J), \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi_{kn,\ell n}\right)(t) + [u, \varphi_{kn,\ell n}](t) = (f, \varphi_{kn,\ell n})(t) \qquad (k, \ell = \overline{1, n-1};\ (k, \ell) \in J) \tag{10}$$

при таких початкових умовах (при $(k, \ell = \overline{1, n-1};\ i', j' = \overline{1, n^2-1})$):

$$u_{kn,j'}(0) = u_0\left(\frac{k}{n}, \frac{j'}{n^2}\right) = 0, \quad u_{i',\ell n}(0) = u_0\left(\frac{i'}{n^2}, \frac{\ell}{n}\right) = 0, \quad u_{kn,\ell n}(0) = u_0\left(\frac{k}{n}, \frac{\ell}{n}\right) = 0.$$

Тут використано позначення:

$$(\psi_1, \psi_2) = \iint\limits_G \psi_1\psi_2 dxdy, \qquad [u, \psi] = \iint\limits_G \left[p_1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] dxdy.$$

К р о к 4. Для тестування запропонованого методу застосуємо загальний метод побудови точних розв'язків тестових задач. Він полягає [8] у представленні допоміжних функцій $h_{1k}(x)$, $h_{2\ell}(y) \in C^r(R)$, $r = 2, 3, 4, 5$, сплайнами r-го степеня ($r \in \{3, 4, 5\}$) і знаходженні невідомих функцій $u_{ij}(t)$ шляхом розв'язання сформульованої вище задачі Коші з однорідними початковими умовами для системи звичайних диференціальних рівнянь (8)–(10).

Відзначимо, що тестові точні розв'язки $O(x, y, t)$ можна будувати у вигляді оператора інтерлінації (4)–(6), довільним чином вибираючи сліди $\varphi_{\mu s}(y)$, $\psi_{\nu p}(x)$ та $D_{\mu,s,\nu,p}(t)$ так, щоб точно були задовільнені початкова і гранична умови, або за допомогою R-функцій [6], які дозволяють точно задовольнити граничну умову, зберігаючи при цьому потрібний клас диференційовності. Застосовуємо до цієї функції $u = O(x, y, t)$ диференціальний оператор

$$Lu(x,y,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q(x,y)u(x,y,t) \equiv g(x,y,t).$$

В результаті отримаємо, що функція $u = O(x, y, t)$ задовольняє рівняння

$$Lu(x, y, t) = g(x, y, t) \tag{11}$$

з відомою правою частиною $g(x, y, t)$. Якщо u — побудована вказаним вище методом функція, то вона є точним розв'язком відповідної початково-крайової задачі.

Теорема 4. *Якщо тестовий приклад побудований з використанням сплайн-інтерполяції на основі сплайн-інтерлінації [5, с. 295–302] і наближений розв'язок знаходимо теж у вигляді сплайн-інтерполяції на основі сплайн-інтерлінації з невідомими параметрами, то наближений розв'язок буде збігатися з точним розв'язком.*

Таким чином, у даній роботі пропонується для тестування інтерлінаційного методу скінченних елементів використовувати тестові точні розв'язки, які належать різним класам диференційовності. Якщо ми будемо розв'язувати задачу (11) при відповідних початковій і граничній умовах іншим методом (наприклад, класичним МСЕ або методом сіток), то зможемо апостеріорно оцінити похибку наближення, порівнюючи наближений розв'язок з точним.

1. *Сергієнко І. В., Литвин О. М.* Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестаціонарної теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 10. – С. 69–73.
2. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Дробот Є. І.* Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестаціонарної теплопровідності з трьома просторовими змінними // Доп. НАН України. – 2000. – № 2. – С. 67–73.
3. *Современные* проблемы концентрации напряжений // Тр. междунар. научной конф., посвященной 75-летию акад. НАН Украины А. С. Космодамианского. – Донецк, 21.06.98–25.06.98. – ДонГУ, 1998. – С. 417.
4. *Babuska I.* Finite element method for domain with corners // Computing. – 1970. – **6**, No 3. – P. 264–273.
5. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
6. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
7. *Литвин О. М., Лобанова Л. С., Залужна Г. В.* Розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності для пластини інтерлінаційним методом скінченних елементів // Пр. Міжнар. симп. "Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXV)". – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2009. – С. 14–19.
8. *Литвин О. М., Лобанова Л. С., Залужна Г. В.* Про один метод побудови точного розв'язку початково-крайової задачі для рівняння нестаціонарної теплопровідності в області складної форми // Математ. та комп'ютерне моделювання. Сер.: Фіз.-мат. науки. Зб. наук. праць Ін-ту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільського національного ун-ту ім. Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 132–138.
9. *Литвин О. М., Лобанова Л. С., Залужна Г. В.* Про один підхід до тестування нових методів розв'язання нестаціонарної задачі теплопровідності // Искусственный интеллект. – 2012. – № 1. – С. 219–228.
10. *Литвин О. Н., Лобанова Л. С., Залужна Г. В.* Численная реализация метода линейных интегро-дифференциальных уравнений для уравнения нестационарной теплопроводности с двумя пространственными переменными // Управляющие системы и машины. – 2012. – № 4. – С. 11–19.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 25.07.2013

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, Л. С. Лобанова, Г. В. Залужная**

Анализ вычислительных возможностей метода интерлинации конечных элементов решения нестационарной задачи теплопроводности

Исследуются некоторые аспекты численной реализации метода интерлинации конечных элементов решения нестационарной задачи теплопроводности для плоских областей сложной формы. Исследования предлагается проводить тестированием этого метода с использованием точных решений, способ построения которых приводится в работе. Метод интерлинации конечных элементов позволяет свести нестационарную задачу теплопроводности к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений меньшего порядка, чем в классическом методе конечных элементов.

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. M. Lytvyn, L. S. Lobanova, G. V. Zaluzhna**

Analysis of the computing power of the interlineational finite element method of solution of the non-stationary heat conduction problem

Some aspects of a numerical implementation of the interlineational finite element method solution of the non-stationary heat conduction problem for planar domains with complex shapes are considered. It is proposed to test this method, by using exact solutions, for which the method of construction is proposed by the authors. The interlineational finite element method allows us to reduce the non-stationary heat conduction problem to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of lower order than in the classical finite element method.