

Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Проведено детальний спектральний аналіз злічених графів, які є об'єднанням скінченного графа та напівобмеженого нескінченного ланцюжка. Охарактеризовано спектр матриці суміжності таких графів, побудовано спектральну міру, наведено у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.

1. Постановка задачі. Спектральна теорія графів є одним із актуальних напрямів у сучасній математичній фізиці (див. [1–8] і цитовану там літературу). Це пов'язано як із внутрішніми стимулами розвитку теорії, так і з вирішенням конкретних прикладних задач, які виникають у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних та транспортних мереж.

Простим неорієнтованим графом G називають пару (V, E) , у якій V — деяка непорожня множина (множина вершин), а E — множина, що складається з неупорядкованих пар різних вершин V (множина ребер). З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої a_{ij} дорівнюють 1, якщо вершини з номерами i та j з'єднуються ребром, або — 0, якщо таке ребро відсутнє.

У випадку злічених графів матриця $A(G)$ породжує в гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор $\mathbb{A}$, спектр якого має дискретну $\sigma_p(\mathbb{A})$ та неперервну компоненту $\sigma_c(\mathbb{A})$. Під спектральним аналізом графа G розуміють спектральний аналіз самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$.

Метою даної роботи є проведення детального спектрального аналізу локально скінченних графів $G_{n,\infty}$, які утворені приєднанням до скінченних графів G_n напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$, вершини якого можна занумерувати всіма натуральними числами $\mathbb{N}$, а ребра з'єднують лише вершини з послідовними номерами.

Матриця суміжності $A(G_{n,\infty})$ графа $G_{n,\infty}$ породжує самоспряжений обмежений оператор $\mathbb{A}$, який діє в $l_2(\mathbb{N})$ як

$$\mathbb{A}x = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{(n-1)i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i + x_{n+1}, x_n + x_{n+2}, \dots, x_{j-1} + x_{j+1}, \dots \right). \quad (1)$$

Тут скінченна симетрична матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ є матрицею суміжності графа G_n .

Матриця суміжності напівобмеженого ланцюжка $A_{\mathbb{N}}$ є якобієвою матрицею J_0 , у якій на головній діагоналі стоять нулі, а на двох побічних — одиниці. Добре відомо, що матриця J_0 породжує в просторі $l_2(\mathbb{N})$ самоспряжений оператор, спектр якого чисто абсолютно неперервний, однократний і утворює інтервал $[-2, 2]$ (див. [4, 9, 10]).

Більше того, для оператора J_0 у просторі $l_2(\mathbb{N})$ справедлива спектральна теорема про розклад за узагальненими власними функціями (див. [9]). Для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ вектор-функція $\varphi_\lambda = (\varphi_{\lambda,1}, \varphi_{\lambda,2}, \dots)$, де $\varphi_{\lambda,j} = P_{j-1}(\lambda)$, $j \geq 1$, є узагальненою власною функцією оператора J_0 , що відповідає власному значенню λ , тобто $J_0\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Тут $P_j(\lambda)$ є поліномом степеня j від λ , що виражається у вигляді $P_j(\lambda) = U_j(\lambda/2)$ через поліноми Чебишова другого роду $U_j(z) = \sin((j+1)\arccos z)/\sin(\arccos z)$. Для поліномів $P_j(\lambda)$ вірне рекурентне співвідношення $P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda)$ з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = \lambda$.

Кожному вектору $x \in l_2(\mathbb{N})$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x(\lambda)}$ за узагальненим власним вектором

$$\widetilde{x(\lambda)} \equiv \mathfrak{F}x = (x, \varphi_\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_{\lambda,j}. \quad (2)$$

Функція $\widetilde{x(\lambda)}$ належить простору $L_2([-2, 2], \rho(\lambda)d\lambda) \equiv L_2(\rho)$ квадратично сумовних функцій на інтервалі $[-2, 2]$ з вагою $\rho(\lambda) = \sqrt{4 - \lambda^2}/2\pi \equiv \rho_0(\lambda)$.

Вірне обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $L_2(\rho)$

$$x \equiv \mathfrak{F}^{-1} \widetilde{x(\lambda)} = \int_{-2}^2 \widetilde{x(\lambda)} \varphi_\lambda \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Для довільних $x, y \in l_2(\mathbb{N})$ справедлива рівність Парсеваля

$$(x, y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{L_2(\rho)}. \quad (4)$$

2. Повний граф. Якщо G_n — повний граф із n вершин (кожні дві вершини якого з'єднує ребро), то йому відповідає матриця суміжності, в якій всі елементи, крім діагональних, є 1, а на діагоналі стоять 0. Повний спектральний аналіз оператора вигляду (1) для повного графа дає така теорема.

Теорема 1. Оператор $\mathbb{A}$ вигляду (1), що відповідає повному графу з n вершин, до однієї з вершин якого приєднаний нескінченний промінь, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(\mathbb{N})$. Спектр оператора містить дискретну та абсолютно неперервну компоненти.

Дискретний спектр оператора $\mathbb{A}$ при $n \geq 3$ складається з двох власних значень: $\sigma_p(\mathbb{A}) = \{-1 \text{ кратності } n-2; \lambda_+\}$, де число λ_+ є додатним нулем квадратного полінома

$$p(\lambda) = (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-2)(n-3)\lambda - (n-2)\lambda^2. \quad (5)$$

Вектори, що мають вигляд $e_m = (0, 0, \dots, 1, -1, 0, \dots)$, де числа 1 та -1 стоять на місцях з номерами m та $m+1$, $m = 1, 2, \dots, n-2$, є власними векторами оператора $\mathbb{A}$, що відповідають власному значенню $\lambda = -1$ та утворюють $(n-2)$ -вимірний підпростір.

Власний вектор, що відповідає власному значенню λ_+ , має вигляд

$$e_+ = (\underbrace{(n-1)^{-1}, \dots, (n-1)^{-1}}_{n-1}, \mu, \mu^2, \dots),$$

де число $\mu = [\lambda_+ - (n-2)](n-1)^{-1}$.

Абсолютно неперервний спектр оператора $\mathbb{A}$ утворює інтервал $[-2, 2]$. Для довільного $\lambda \in [-2, 2]$ узагальнений власний вектор оператора $\mathbb{A}$ явно виражається через поліноми $P_j(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda = & (\underbrace{P_0(\lambda), \dots, P_0(\lambda)}_{n-1}, P_1(\lambda) - (n-2)P_0(\lambda), P_2(\lambda) - (n-2)P_1(\lambda) - (n-2)P_0(\lambda), \\ & \dots, P_{j-n+1}(\lambda) - (n-2)P_{j-n}(\lambda) - (n-2)P_{j-n-1}(\lambda), \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Для векторів $x \in H_c = l_2(\mathbb{N}) \ominus H_p$, де H_p — підпростір, що містить усі власні вектори $\mathbb{A}$, перетворення Фур'є $x(\lambda)$ за узагальненими власними векторами, яке визначається (2), належить простору $L_2(\rho)$ зі спектральною щільністю

$$\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4 - \lambda^2}}{2\pi p(\lambda)}, \quad (7)$$

де поліном $p(\lambda)$ визначається рівністю (5).

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}$ є ізометричним оператором із підпростору $H_c \subset l_2(\mathbb{N})$ у простір $L_2(\rho)$. Вірне обернене перетворення Фур'є (3), визначене на всьому $L_2(\rho)$. Для довільних $x, y \in H_c$ справедлива рівність Парсеваля (4).

Доведення випливає з явного вигляду оператора $\mathbb{A}$ і наведених виразів для власних векторів. Враховуючи, що система поліномів $\{P_j\}_{j=0}^\infty$ утворює ортонормований базис у просторі $L_2(\rho_0)$, а вираз $(1 + \mu^2 - \mu\lambda)^{-1} = \sum_{m=0}^\infty \mu^m P_m(\lambda)$ є твірною для поліномів P_j , отримуємо вираз (7) для спектральної щільності аналогічно тому, як це зроблено для зіркових графів у роботі [11].

Приклад 1. При $n = 3$ граф $G_{3,\infty}$ має вигляд трикутника, до однієї вершини якого приєднаний промінь. Спектр такого графа містить два прості власні значення $\sigma_p = \{-1, \sqrt{5}\}$ і абсолютно неперервну компоненту $\sigma_{ac} = [-2, 2]$. Спектральна щільність визначається як $\rho(\lambda) = \sqrt{4 - \lambda^2}/(2\pi(5 - \lambda^2))$.

3. Загальний випадок. Розглянемо випадок $G_{n,\infty}$ графа, якому відповідає оператор $\mathbb{A}$ виду (1).

Теорема 2. Для самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду (1) у просторі $l_2(\mathbb{N})$ власний вектор e_λ буде фінітним (у якого тільки скінченне число компонент відмінне від нуля) тоді й лише тоді, коли:

а) усі його компоненти $e_{\lambda,j} = 0$ при $j \geq n$;

б) ранг матриці $\widetilde{A}(\lambda)$, отриманої з $A - \lambda I$ шляхом відкидання останнього стовпчика, менший ніж $n - 1$;

в) вектор $\widehat{e}_\lambda = (e_{\lambda,1}, \dots, e_{\lambda,n-1})$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\widetilde{A}(\lambda)\widehat{e}_\lambda = 0. \quad (8)$$

Теорема 3. Для самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду (1) у просторі $l_2(\mathbb{N})$ власному значенню λ з умовою $|\lambda| > 2$ відповідає нефінітний власний вектор тоді й лише тоді, коли число λ є розв'язком системи рівнянь

$$\lambda = \mu + \mu^{-1}, \quad \mu^{-1} = \frac{\det(\lambda I - \widehat{A})}{\det(\lambda I - A)}, \quad (9)$$

де $|\mu| < 1$, а матриця $\widehat{A}$ отримується із матриці A відкиданням останнього стовпчика і останнього рядка. З точністю до сталого множника нефінітний власний вектор має вигляд

$$e_\lambda = (e_{\lambda,1}, \dots, e_{\lambda,n-1}, \mu, \mu^2, \dots, \mu^k, \dots).$$

Вектор $\widetilde{e}_\lambda = (e_{\lambda,1}, \dots, e_{\lambda,n-1}, \mu)$ є розв'язком рівняння

$$(A - \lambda I)\widetilde{e}_\lambda + \mu^2 e_n = 0, \quad (10)$$

де $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ — n -вимірний вектор.

Нехай поліном $r(\lambda)$ з коефіцієнтом, що дорівнює 1, при старшому степені λ є найбільшим спільним дільником $\det(\lambda I - A) = a(\lambda)r(\lambda)$ та $\det(\lambda I - \widehat{A}) = a(\lambda)r(\lambda)$, тоді, підставляючи $\mu^{-1} = \widehat{a}a^{-1}$ у рівність $\lambda = \mu + \mu^{-1}$, отримуємо, що множина власних значень λ оператора $\mathbb{A}$ вигляду (1), які відповідають нескінченним власним векторам, є множиною дійсних нулів полінома

$$p(\lambda) = \widehat{a(\lambda)}^2 + a(\lambda)^2 - \lambda \widehat{a(\lambda)}a(\lambda), \quad (11)$$

які за модулем більші, ніж 2, і для яких $\mu = \widehat{a}a^{-1}$ за модулем менші, ніж 1. Поліном (11) будемо називати спектральним для графа $G_{n,\infty}$. У спектрального полінома усі дійсні нулі прості і за модулем не менші, ніж 2.

Теорема 4. Для $\lambda \in [-2, 2]$ існує і єдина вектор-функція $\varphi_\lambda = (\varphi_{\lambda,0}, \varphi_{\lambda,1}, \dots)$, яка є узагальненим власним вектором для оператора $\mathbb{A}$ з власним значенням λ , і така, що всі її компоненти є поліномами від λ та задовольняють умови:

- 1) вектор $\widehat{\varphi_\lambda}$ ортогональний усім фінітним власним векторам оператора $\mathbb{A}$;
- 2) $\varphi_{\lambda,n} = \widehat{a(\lambda)}$, $\varphi_{\lambda,n+1} = a(\lambda)$;
- 3) існують і єдині числа $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ($\gamma_k \neq 0$) такі, що при $j \geq 2n + 2$

$$\varphi_{\lambda,j} = P_j(\lambda) + \sum_{l=1}^k \gamma_l P_{j-l}(\lambda). \quad (12)$$

Теорема 5. Нехай H_c — підпростір простору $l_2(V)$, який складається з векторів, ортогональних до всіх власних векторів самоспряженого оператора $\mathbb{A}$ вигляду (1). Тоді справедливі розклади векторів $x \in H_c$ за узагальненими власними векторами φ_λ , тобто вірні рівності (2)–(4), де спектральна щільність $\rho(\lambda)$ визначається через поліноми $p(\lambda)$ у вигляді (7).

Доведення теорем 2–5 використовує явний вигляд (1) оператора $\mathbb{A}$ і той факт, що компоненти звичайних і узагальнених власних векторів задовольняють просте різницеве рівняння $\psi_{j-1} + \psi_{j+1} = \lambda \psi_j$ при $j \geq n$. Дане рівняння має два лінійно незалежні розв'язки $\psi_j = \mu^{\pm j}$ при $|\lambda| > 2$, де $\mu + \mu^{-1} = \lambda$, або $\psi_j = P_j(\lambda)$, $\psi_j = P_{j+1}(\lambda)$ при $|\lambda| \leq 2$. Крім того, можна показати, що матриця суміжності графа $G_{n,\infty}$ унітарно еквівалентна ортогональній сумі скінченної симетричної матриці і яacobієвої матриці J , у якій лише скінченне число елементів відмінні від відповідних елементів матриці J_0 . Це дає можливість використати спектральну теорію яacobієвих матриць [9, 10] і приводить до рівностей (2)–(4) у підпросторі H_c з деякою спектральною щільністю $\rho(\lambda)$. Зв'язок (7) спектральної щільності $\rho(\lambda)$ зі спектральним поліномом $p(\lambda)$ впливає із явного вигляду (12) для узагальнених власних векторів.

4. Циклічний граф. Розглянемо граф $C_{n,\infty}$, що утворений приєднанням нескінченного променя до однієї вершини циклічного графа C_n із n послідовно занумерованих вершин. Оператор $\mathbb{A}$, який відповідає матриці суміжності $A(C_{n,\infty})$, діє так:

$$\mathbb{A}x = (x_2 + x_n, x_1 + x_3, \dots, x_{n-2} + x_n, x_1 + x_{n-1}, \dots, x_{j-1} + x_{j+1}, \dots). \quad (13)$$

Теорема 6. Оператор $\mathbb{A}$ вигляду (13), що відповідає циклічному графу $C_{n,\infty}$ з n вершин, до однієї з вершин якого приєднаний нескінченний промінь, є обмеженим самоспряженим оператором у $l_2(\mathbb{N})$.

Дискретний спектр оператора $\mathbb{A}$, якому відповідають фінітні власні значення, має вигляд:

$$\sigma_p(\mathbb{A}) = \left\{ \lambda_k = 2 \cos \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] - 1 \right\}.$$

Абсолютно неперервна компонента спектра оператора $\mathbb{A}$ утворює інтервал $[-2, 2]$. Спектральна щільність $\rho(\lambda)$ визначається рівністю (7), у якій спектральний поліном має вигляд (11), де $\widehat{a(\lambda)} = P_{n-1}(\lambda)/r(\lambda)$, $a(\lambda) = (P_n(\lambda) - P_{n-2}(\lambda) - 2)/r(\lambda)$, $a r(\lambda) = \prod_{k=1}^{[n/2]-1} (\lambda - \lambda_k)$.

Приклад 2. У випадку, коли нескінченний промінь приєднаний до циклічного графа із 4 вершин, оператор $\mathbb{A}$ має фінітний власний вектор $e_0 = (0, 1, -1, 0, 0, 0, \dots)$ з власним значенням $\lambda = 0$, два нефінітні власні вектори $e_{\pm} = ((1/\sqrt{2})\mu_{\pm}, 1/2, 1/2, \mu_{\pm}, \mu_{\pm}^2, \dots)$, що відповідають власним значенням $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{2+2\sqrt{2}}$, де числа $\mu_{\pm} = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$ пов'язані з $\lambda_{\pm}$ співвідношеннями $\mu_{\pm} = \sqrt{2}\lambda_{\pm}^{-1}$. Власні значення $\lambda_{\pm}$ є нулями спектрального полінома $p(\lambda) = 4 + 4\lambda^2 - \lambda^4$.

Кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi_{\lambda} = (2P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda) - P_0(\lambda), P_3(\lambda) - 2P_1(\lambda), P_4(\lambda) - 2P_2(\lambda) - P_0(\lambda), \dots, P_{j-2}(\lambda) - 2P_{j-4}(\lambda) - P_{j-6}(\lambda), \dots). \quad (14)$$

Для векторів $x \in H_c \subset l_2(\mathbb{N})$ справедливі розклади (2), (3) за узагальненим власним вектором φ_{λ} вигляду (14).

5. Т-подібні графи. Розглянемо граф $T_{p,q,\infty}$, утворений приєднанням променя $A_{\mathbb{N}}$ до вершини, що ділить ланцюжок на дві частини із p та q ребрами. Оскільки характеристичний многочлен $\det(\lambda I - A_m)$ матриці A_m простого ланцюга із m вершин виражається через поліном $P_m(\lambda)$, а характеристичний многочлен незв'язного графа є добуток характеристичних многочленів матриць суміжності кожної з компонент незв'язного графа, то для $T_{p,q,\infty}$ -графа

$$\det(\lambda I - \widehat{A}) = P_p(\lambda)P_q(\lambda), \quad \det(\lambda I - A) = P_{p+q+1}(\lambda). \quad (15)$$

У випадку, коли $p = q$, тобто у T -графа рівні плечі, взаємно прості поліноми $\widehat{a(\lambda)}$ і $a(\lambda)$ мають вигляд

$$\widehat{a(\lambda)} = P_q(\lambda), \quad a(\lambda) = P_{q+1}(\lambda) - P_{q-1}(\lambda). \quad (16)$$

Тому спектральний поліном графа $T_{q,q,\infty}$ із (11) з урахуванням (16) має вигляд

$$p(\lambda) = P_q(\lambda)^2 + 2P_{q-1}(\lambda)^2 - 2P_{q+1}(\lambda)P_{q-1}(\lambda).$$

Оскільки нулями полінома $P_m(\lambda)$ є числа $\lambda_k = 2\cos(\pi k/(2(m+1)))$ ($k = 1, 2, \dots, m$), то взаємно прості поліноми $\widehat{a(\lambda)}$ і $a(\lambda)$ для випадку (15) знаходяться явно. Зокрема, у випадку, коли числа $p+1$ і $q+1$ взаємно прості, $\widehat{a(\lambda)} = P_p(\lambda)P_q(\lambda)$, а $a(\lambda) = P_{p+q+1}(\lambda)$ і спектральний поліном має вигляд

$$p(\lambda) = P_{p+q+1}(\lambda)[P_{p+q+1}(\lambda) - \lambda P_p(\lambda)P_q(\lambda)] + P_p(\lambda)^2 P_q(\lambda)^2.$$

6. Зіркові графи. Розглянемо зірковий граф $S_{\vec{k},\infty}$, $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ з одним нескінченним променем, що приєднаний до центра зіркового графа $S_{\vec{k}}$ з ланцюговими променями, які містять відповідно $k_1, k_2, \dots, k_n$ вершин і виходять із центра зіркового графа. У цьому випадку можна у явному вигляді провести повний спектральний аналіз такого графа, виходячи із загальних теорем, наведених у п. 3. Дійсно, характеристичний многочлен матриці суміжності графа $S_{\vec{k}}$ явно виражається через поліноми $P_j(\lambda)$ у вигляді $\det(\lambda I - A) = \lambda P_{k_1}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda) - \sum_{j=1}^n [P_{k_1}(\lambda) \cdots P_{k_{j-1}}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda)]$. Характеристичний многочлен

зіркового графа S_k^- з вилученим центром має вигляд $\det(\lambda I - \tilde{A}) = P_{k_1}(\lambda)P_{k_2}(\lambda) \cdots P_{k_n}(\lambda)$. Тоді спектральний поліном зіркового графа $S_{k,\infty}^-$ визначається рівністю (11). У випадку, коли всі скінченні промені містять однакову кількість вершин, тобто $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$, $r(\lambda) = P_k(\lambda)^{n-1}$ і спектральний поліном має вигляд

$$p(\lambda) = P_k(\lambda)^2 + n^2 P_{k-1}(\lambda)^2 - \lambda n P_k(\lambda) P_{k-1}(\lambda).$$

Цей вираз у випадку $k = 1$ тотожний розглянутому в роботі [11] $p(\lambda) = n^2 - (n-1)\lambda^2$. При $k = 2$ спектральний поліном має вигляд $p(\lambda) = 1 + (n^2 + n - 2)\lambda^2 - (n-1)\lambda^4$.

Роботу виконано в рамках проекту 03-01-12 “Обернені задачі в сучасній математичній фізиці” спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Автори висловлюють щирю подяку Ю. С. Самойленку за конструктивні зауваження.

1. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х. Спектры графов. Теория и применение. – Киев: Наук. думка, 1984. – 384 с.
2. Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С. Введение в спектральную теорию графов. – Киев: Центр учеб. лит., 2007. – 114 с.
3. Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of graphs. – New York: Springer, 2012. – 250 с.
4. Mohar B. The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra Appl. – 1982. – **48**. – P. 245–256.
5. Mohar B., Woess W. A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209–234.
6. Mantoiu M., Richard S., Tiedra de Aldecoa R. Spectral analysis for adjacency operators on graphs // arXiv:math-ph/0603020v1 7 Mar 2006.
7. von Below J. An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**. – P. 1–19.
8. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. – Москва: Физматлит, 2004. – 272 с.
9. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
10. Simon B. Szego’s theorem and its descendants: Spectral theory for L_2 perturbations of orthogonal polynomials. – Princeton, NY: Princeton Univ. Press, 2011. – 650 p.
11. Лебідь В. О., Нижник Л. П. Спектральний аналіз зіркового графа з одним нескінченним променем // Наук. зап. НаУКМА. – 2013. – **139**. – С. 18–22.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 18.09.2013

В. А. Лебедь, Л. П. Нижник

Спектральный анализ локально конечных графов с одним бесконечным лучом

Проведен детальний спектральний аналіз счетных графов, которые являются объединением конечного графа и полуограниченной бесконечной цепочки. Охарактеризован спектр матрицы смежности таких графов, построена спектральная мера, приведены в явной форме собственные векторы и спектральное разложение по собственным векторам.

V. O. Lebid, L. P. Nizhnik

Spectral analysis of locally finite graphs with one infinite ray

A complete spectral analysis of countable graphs defined as the union of a finite graph and a semibounded infinite chain is given. The spectrum of the adjacency matrix of graphs is defined, a spectral measure is constructed, the eigenvectors and the spectral expansion in eigenvectors are presented.