УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов

О регулярных решениях задачи Дирихле для уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Устанавливаются критерии существования регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами первого рода в произвольных жордановых областях с граничными функциями, допускающими не более счетного числа точек разрыва. В частности, установлено существование регулярных решений для произвольных граничных функций ограниченной вариации.

Данная работа является естественным продолжением наших статей [1, 2], где можно найти историю вопроса и решение задачи Дирихле для случая непрерывных граничных функций (см. также [3]). Мы устанавливаем критерии существования регулярных решений задачи Дирихле в произвольных жордановых областях для граничных данных, допускающих не более счетного числа разрывов, и в частности для произвольных функций ограниченной вариации.

Пусть D — жорданова область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. *Уравнением Бельтрами первого рода* называется уравнение вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \ —$$

дилатацией уравнения (1). Уравнение (1) называется *вырожденным*, если дилатация K_μ является существенно неограниченной, т. е. $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Задача Дирихле для уравнений Бельтрами (1) в ограниченной области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ для непрерывной граничной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$ состояла в нахождении непрерывной функции $f\colon D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п. в. и удовлетворяющей уравнению (1) п. в., а также граничному условию

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{2}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

При $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$, допускающей не более счетного числа точек разрыва, под *регулярным решением* такой задачи будем понимать непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq$ $\neq 0$ п. в., удовлетворяющее условию (2) в точках непрерывности φ и п. в. (1). Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$.

Напомним, что в случае $\mu(z) \equiv 0$ теорема существования решения задачи Дирихле в жордановых областях для граничных функций, допускающих не более счетного числа точек разрыва, хорошо известна (см., например, секцию 3 гл. VI в [4]).

Следуя работе [5], говорим, что функция $\phi\colon D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in D$, пишем $\phi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \ \fint_{B(z_0,\varepsilon)} |\phi(z) - \widetilde{\phi}_\varepsilon|\, dm(z) < \infty, \tag{3}$$

где $B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\phi}_\varepsilon$ — среднее значение ϕ в круге $B(z_0,\varepsilon)$. Пишем $\phi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (3) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\phi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если ϕ задана в некоторой области G в $\mathbb{C}$, содержащей $\overline{D}$, и $\phi \in \mathrm{FMO}(z_0)$ для всех $z_0 \in \overline{D}$.

1. Основная лемма. Начнем с общего критерия существования регулярных решений задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1) в произвольных жордановых областях. Далее и, в частности, в условии (4) мы предполагаем, что K_μ продолжена нулем вне D.

Лемма 1. *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. и $K_\mu \in L^1(D)$. Предположим, что для каждого $z_0 \in \overline{D}$ выполнено условие*

$$\int_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_\mu(z) \cdot \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z - z_0|)\, dm(z) = o(I^2_{z_0}(\varepsilon)) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0 \tag{4}$$

для семейства измеримых функций $\psi_{z_0,\varepsilon}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\varepsilon \in (0, \delta(z_0))$, таких, что

$$0 < I_{z_0}(\varepsilon) := \int_{\varepsilon}^{\delta(z_0)} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty.$$

Тогда уравнение Бельтрами (1) *имеет регулярное решение f задачи Дирихле* (2) *для любой ограниченной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, допускающей не более счетного числа точек разрыва.*

Действительно, пусть F — регулярное гомеоморфное решение уравнения Бельтрами (1) класса $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и которое существует по лемме 4.1 из [6] в силу условия (4). Заметим, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^*$, где $D^* = F(D)$, не может состоять из единственной точки ∞, так как в противном случае граница D^* являлась бы слабо плоской и по леммам 6.6 и 6.7 в [7] отображение F должно было иметь гомеоморфное продолжение в $\overline{D}$, что невозможно, поскольку граница D состоит более чем из одной точки. Кроме того, область D^* односвязна (см., например, лемму 5.3 в [5] или лемму 6.5 в [8]). Таким образом, по теореме Римана (см., например, II.2.1 в [4]), D^* можно отобразить на единичный круг $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ с помощью конформного отображения R. Ввиду инвариантности модуля при конформных отображениях, $g := R \circ F$ вновь является регулярным гомеоморфным решением уравнения Бельтрами (1), которое является кольцевым Q-гомеоморфизмом в $\overline{D}$ с $Q = K_\mu$ и отображает D на $\mathbb{D}$. Более того, по леммам 6.6 и 6.7 в [7], g допускает продолжение до гомеоморфизма $g_*\colon \overline{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, поскольку $\mathbb{D}$ имеет слабо плоскую границу, а жорданова область D локально связна на границе.

Будем искать решение исходной задачи Дирихле (2) в виде композиции $f = h \circ g$, где h — аналитическая функция в $\mathbb{D}$ с граничным условием в точках непрерывности

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} h(z) = \varphi(g_*^{-1}(\zeta)).$$

Существование гармонической функции $\operatorname{Re} h$ известно (см., например, секцию 3 гл. VI из [4]), и аналитическая функция h восстанавливается в $\mathbb{D}$ по ее действительной части с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной. Как легко видеть, функция $f = h \circ g$ дает искомое регулярное решение задачи Дирихле (2) для уравнения Бельтрами (1).

2. Основные результаты. Выбирая в лемме 1 специальную функцию $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) = 1/t\log(1/t)$ (см., например, лемму 5.3 в [7]), получаем:

Теорема 1. *Пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая в жордановой области D функция такая, что $|\mu(z)| < 1$ п. в. и $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ п. в. для функции $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ класса $\mathrm{FMO}(\overline{D})$. Тогда для любой ограниченной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, допускающей не более счетного числа точек разрыва, уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (2).*

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ п. в. для функции $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ класса $\mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

Кроме того, в силу достаточных условий FMO (см., например, предложение 2.2 и следствие 2.1 в [7]), имеем также:

Следствие 2. *Заключение теоремы 1 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z)$ п. в. для локально интегрируемой функции $Q\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ такой, что все точки $z \in \overline{D}$ являются ее точками Лебега.*

Следствие 3. *Заключение теоремы 1 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\,dm(z) < \infty \qquad \forall z_0 \in \overline{D}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$, и*

$$\int_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu(z_0,r)\|(r)} = \infty \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D},$$

где $\|K_\mu\|(z_0,r) = \int_{\gamma_r} K_\mu(z)\,|dz|$ — нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup_{z\in D}|z-z_0|$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, допускающей не более счетного числа точек разрыва.

Теорема получается из леммы 1 с $\psi_{z_0,\varepsilon}(t) \equiv 1/||K_\mu||(z_0,t)$, $t \in (0,\delta(z_0))$.

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0 \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D},$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — среднее значение функции K_μ на окружности $S(z_0,\varepsilon)$.

Наконец, по теореме 2.3 и 2.4 в [7], получаем следующую теорему из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая в жордановой области D функция с $|\mu(z)| <$ < 1 п. в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dm(z) < \infty,$$

где $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда уравнение Бельтрами (1) имеет регулярное решение задачи Дирихле (2) для любой ограниченной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, допускающей не более счетного числа точек разрыва.

Следствие 5. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int\limits_D e^{\alpha K_\mu(z)}\, dm(z) < \infty.$$

Замечание 1. В частности, все приведенные теоремы имеют место для функций φ ограниченной вариации.

1. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И.* К задаче Дирихле для уравнений Бельтрами // Доп. НАН України. – 2012. – № 6. – С. 30–33.
2. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И.* О задаче Дирихле для уравнений Бельтрами в конечносвязных областях // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 7. – С. 932–944.
3. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* Dirichlet problem for general degenerate Beltrami equation in Jordan domains // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, No 4. – С. 460–476.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.
5. *Игнатьев А. А., Рязанов В. И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395–417.
6. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On strong solutions of the Beltrami equations // Complex Var. Elliptic Equat. – 2010. – **55**, No 1–3. – P. 219–236.
7. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach. – New York: Springer, 2012. – 301 p. – (Developments in Mathematics; Vol. 26.)
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p. – (Springer Monographs in Mathematics.)

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 24.09.2013

Д. О. Ковтонюк, І. В. Пєтков, В. І. Рязанов

Про регулярні розв'язки задачі Діріхле для рівнянь Бельтрамі

Встановлено критерії існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі першого роду в довільних жорданових областях з граничними функціями, що допускають не більше зліченного числа точок розриву. Зокрема, встановлено існування регулярних розв'язків для довільних граничних функцій обмеженої варіації.

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov

On the regular solutions of the Dirichlet problem for Beltrami equations

The criteria of existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations of the first kind in arbitrary Jordan domains with the boundary functions admitting at most a countable number of discontinuity points are established. In particular, the existence of regular solutions for arbitrary boundary functions of bounded variation is proved.