



УДК 517.95

В. М. Бойко

## Редукція диференціальних рівнянь до алгебраїчних

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

*У термінах сингулярних модулів редукції, тобто сингулярних модулів неklasичної (умовної) симетрії, вивчено питання редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь.*

“Некласичний” підхід до знаходження розв’язків диференціальних рівнянь запропоновано в [1] на прикладі (1+1)-вимірному лінійному рівнянні теплопровідності як узагальнення класичного лівського методу редукції. Протягом останніх десятиліть цей підхід суттєво розвинуто і використано при дослідженні багатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними (див. детальний огляд у роботах [2–4]). Слід відмітити, що для відповідних об’єктів у літературі використовують досить різноманітну термінологію: порушені [5], некласичні [6],  $Q$ -умовні [7], умовні [8], часткові [9] симетрії, або інволютивні сім’ї/модулі некласичних/умовних операторів симетрії [10, 11] у більш повній формі. Характерною особливістю, яку некласичні симетрії успадковують від лівських, є те, що вони дозволяють будувати анзаці для невідомої функції, які редукують відповідне диференціальне рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Як правило, у літературі розглядають редукції з використанням некласичних симетрій до звичайних диференціальних рівнянь, і на сьогодні існує лише декілька робіт, де розглянуто особливий випадок редукцій до алгебраїчних рівнянь (див., наприклад, [12]). Саме редукціям диференціальних рівнянь до алгебраїчних і присвячено цю роботу.

Нехай задано розшарований простір  $n$  незалежних змінних  $x = (x_1, \dots, x_n)$  і однієї залежної змінної  $u$ . Розглянемо скінченновимірний інволютивний модуль  $Q$  векторних полів у цьому просторі і припустимо, що розмірність  $p$  модуля  $Q$  над кільцем гладких функцій змінних  $x, u$  не перевищує  $n$ ,  $0 < p \leq n$ . Додатково вважаємо, що модуль  $Q$  задовольняє так звану умову на ранг, тобто для кожного фіксованого значення  $(x, u)$  проекція на простір змінних  $x \in p$ -вимірною. Атрибут “інволютивний” означає, що комутатор будь-яких двох векторних полів з  $Q$  належить  $Q$ . Надалі вважаємо, що індекси  $i$  та  $j$  змінюються від 1

до  $n$ , індекс  $s$  змінюється від 1 до  $p$ , і за індексами, що повторюються, йде підсумовування. Дужками  $\langle \dots \rangle$  позначатимемо лінійну оболонку векторних полів над кільцем гладких функцій змінних  $x, u$ . Нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  і  $\partial_u = \partial/\partial u$ . Будь-яку функцію вважаємо своєю похідною нульового порядку. Весь розгляд проводимо у рамках локального підходу.

Нехай векторні поля  $Q_s = \xi^{si}(x, u)\partial_i + \eta^s(x, u)\partial_u$  утворюють базис модуля  $Q$ , тобто  $Q = \langle Q_1, \dots, Q_p \rangle$ . Тоді умова на ранг еквівалентна рівності  $\text{rang}(\xi^{si}) = p$ . Вимога, що комутатор будь-якої пари базисних елементів належить  $Q$ , тобто  $[Q_s, Q_{s'}] \in Q$ , достатня для інволютивності модуля  $Q$ . Якщо векторні поля  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_p$  утворюють інший базис модуля  $Q$ , то існує невідроджена  $p \times p$  матрична функція  $(\lambda^{ss'}(x, u))$  така, що  $\tilde{Q}_s = \lambda^{ss'} Q_{s'}$ .

Розглянемо диференціальне рівняння  $\mathcal{L}$  вигляду  $L(x, u_r) = 0$  для невідомої функції  $u$  незалежних змінних  $x = (x_1, \dots, x_n)$  і порядку  $r$ . Тут через  $u_r$  позначено множину всіх похідних функції  $u$  за змінними  $x$  порядку не вище  $r$ , включаючи  $u$  як похідну нульового порядку. У рамках локального підходу рівняння  $\mathcal{L}$  інтерпретують як алгебраїчне рівняння в просторі струменів  $J^r = J^r(x|u)$  порядку  $r$  і ототожнюють з многовидом його розв'язків у  $J^r$ :

$$\mathcal{L} = \{(x, u_{(r)}) \in J^r \mid L(x, u_{(r)}) = 0\}.$$

Символ  $\mathcal{L}$  використовуємо також для позначення цього многовиду, а символ  $Q_r$  — для позначення многовиду, який визначено всіма диференціальними наслідками характеристичної системи  $Q[u] = 0$  в  $J^r$ .

Диференціальне рівняння  $\mathcal{L}$  називають *умовно інваріантним* відносно інволютивного модуля  $Q$ , якщо співвідношення  $V_r L(x, u_r)|_{\mathcal{L} \cap Q_r} = 0$  виконується для будь-якого  $V \in Q$ . Це співвідношення називають *критерієм умовної інваріантності*, а  $Q$  — *інволютивним модулем операторів умовної симетрії* (або  $Q$ -умовної симетрії, або неklasичної симетрії і т. п.) рівняння  $\mathcal{L}$ .

Рівняння  $\mathcal{L}$  умовно інваріантне відносно модуля  $Q$  тоді і лише тоді, коли анзац, побудований за цим модулем, редукує рівняння  $\mathcal{L}$  до диференціального рівняння з  $n - p$  незалежними змінними. Тому інволютивні модулі операторів умовної симетрії коротко називатимемо *модулями редукції* рівняння  $\mathcal{L}$  [2, 4].

Нехай  $L = L[u]$  — диференціальна функція порядку  $\text{ord } L = r$  (тобто гладка функція незалежних змінних  $x = (x_1, \dots, x_n)$  і похідних від  $u$  за змінними  $x$  порядку не вище  $r$ ) і нехай  $Q$  —  $p$ -вимірний ( $0 < p < n$ ) інволютивний модуль, який породжений векторними полями  $Q_s = \xi^{si}(x, u)\partial_i + \eta^s(x, u)\partial_u$  і задовольняє умову на ранг  $\text{rang}(\xi^{si}) = p$ . Модуль  $Q$  називатимемо *сингулярним* для  $L$ , якщо існує диференціальна функція  $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$  порядку меншого, ніж  $r$ , така, що  $L|_{Q_r} = \tilde{L}|_{Q_r}$ . В іншому випадку  $Q$  є *регулярним* модулем для диференціальної функції  $L$ . Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, обмеження яких на  $Q_r$  збігається з  $L|_{Q_r}$ , дорівнює  $k$  ( $k < r$ ), тоді модуль  $Q$  називатимемо *сингулярним копорядку  $k$*  для диференціальної функції  $L$ . Модуль  $Q$  є *ультрасингулярним* для  $L$ , якщо  $L|_{Q_r} \equiv 0$ . Копорядок сингулярності ультрасингулярних модулів та порядок тотожно нульових диференціальних функцій зручно покласти рівним  $-1$ . Для будь-якого регулярного модуля диференціальної функції  $L$  визначимо його копорядок сингулярності як  $r = \text{ord } L$ . Копорядок сингулярності модуля  $Q$  відносно диференціальної функції  $L$  позначимо через  $\text{sc } Q$ . Інволютивний модуль  $Q$ , що задовольняє умову на ранг, є (*сильно*) *сингулярним* для диференціального рівняння  $\mathcal{L}$ , якщо він сингулярний для диференціальної функції  $L[u]$ ,

яка є лівою частиною канонічного зображення  $L[u] = 0$  рівняння  $\mathcal{L}$ . Атрибут “сильний”, як правило, будемо опускати.

Випадок, коли розмірність модулів векторних полів збігається з кількістю незалежних змінних, тобто  $p = n$ , є особливим для сингулярності модулів диференціальних функцій. Якщо  $n$ -вимірний інволютивний модуль  $Q$  породжують векторні поля, що задовольняють умову на ранг, то для будь-якої диференціальної функції  $L = L[u]$  порядку  $r$  існує диференціальна функція  $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$  нульового порядку така, що  $L|_{Q_r} = \tilde{L}|_{Q_r}$ . Тому в цьому випадку вважаємо, що модуль  $Q$  є сингулярним для  $L$  тоді і лише тоді, коли він є ультра-сингулярним для  $L$ , тобто  $L|_{Q_r} \equiv 0$ . Цей випадок також є особливим при редукції диференціальних рівнянь. На відміну від модулів редукції нижчих розмірностей,  $n$ -вимірні модулі редукції будь-якого диференціального рівняння  $\mathcal{L}$  з  $n$  незалежними змінними редукують це рівняння до алгебраїчних рівнянь, а не до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Більш того, лише в цьому випадку регулярні та сингулярні модулі редукції можна вивчити в рамках єдиного підходу.

Нехай  $Q$  — інволютивний модуль розмірності  $p = n$ , який задовольняє умову на ранг. Тоді можна вибрати базис модуля  $Q$ , утворений векторними полями  $Q_s = \partial_s + \eta^s(x, u)\partial_u$ . Оскільки модуль  $Q$  інволютивний, базисні елементи  $Q_s$  комутують, а тому коефіцієнти  $\eta^s = \eta^s(x, u)$  задовольняють систему рівнянь

$$\eta_{s'}^s + \eta^{s'} \eta_u^s = \eta_s^{s'} + \eta^s \eta_u^{s'}. \quad (1)$$

За теоремою Фробеніуса система  $Q_s \Phi = \Phi_s + \eta^s \Phi_u = 0$  на функцію  $\Phi = \Phi(x, u)$  має єдиний функціонально незалежний розв'язок, що не є сталою. Іншими словами, коефіцієнти  $\eta^s$  можна зобразити у вигляді  $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ , де  $\Phi = \Phi(x, u)$  — деяка гладка функція,  $\Phi_u \neq 0$ . Неявний анзац, побудований для  $u$  за модулем  $Q$ , має вигляд  $\Phi(x, u) = \varphi$ , де  $\varphi$  — нова невідома (нуль-арна) функція. Вона є сталою, оскільки розмірність модуля  $Q$  дорівнює кількості незалежних змінних  $x$ .

Припустимо, що  $Q$  — модуль редукції диференціального рівняння  $\mathcal{L}: L[u] = 0$  порядку  $r$ . Усі похідні функції  $u$  за змінними  $x$  від 1-го до  $r$ -го порядку на многовиді  $Q_r$ , виражаються через змінні  $x$  і  $u$ :

$$u_\alpha = h^\alpha(x, u) := (\partial_1 + \eta^1 \partial_u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n + \eta^n \partial_u)^{\alpha_n} u, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r.$$

Оскільки векторні поля  $Q_s$  комутують, таке зображення для похідних  $u_\alpha$  добре визначене, бо не залежить від порядку множників у правій частині. Використовуючи це зображення для виключення похідних  $u_\alpha$  з  $L$ , отримаємо диференціальну функцію  $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$  нульового порядку, тобто функцію від змінних  $x, u$ . Варіюючи  $\eta^s$ , отриману функцію можна інтерпретувати як диференціальну функцію незалежних змінних  $x, u$  та залежних змінних  $\eta^s$ . Таким чином, внаслідок [4, лема 1]  $Q$  є модулем редукції для  $\mathcal{L}$ , якщо виконується умова  $Q_s \tilde{L}|_{\tilde{L}=0} = 0$ . Ця умова разом з рівняннями (1) задає повну систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів  $\eta^s$ , а на підставі зображення  $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$  її можна також інтерпретувати як рівняння  $L^\Phi = 0$  на функцію  $\Phi$ , де  $L^\Phi = \tilde{L}|_{\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u}$  розглядаємо як диференціальну функцію незалежних змінних  $x, u$  та залежної змінної  $\Phi$ .

Для спрощення умови  $Q_s \tilde{L}|_{\tilde{L}=0} = 0$  можна розв'язати рівняння  $\tilde{L} = 0$  відносно однієї зі змінних (відносно однієї з незалежних змінних або відносно залежної змінної  $u$ ) і виключити цю змінну з рівняння  $Q_s \tilde{L} = 0$ , використовуючи одержане співвідношення. Оскільки функції  $\tilde{L}$  і  $\eta^s$  (відповідно  $\Phi$ ) залежать від тих самих аргументів, ця процедура не приводить до звичайного диференціального рівняння.

У дійсності зручніше використовувати інший шлях, із залученням леми Адамара. У рамках локального підходу достатньо розбити подальший розгляд на два випадки: або функція  $\tilde{L}$  має максимальний ранг, або вона є сталою. Згідно з лемою Адамара у першому випадку для кожного  $s$  умова  $Q_s \tilde{L}|_{\tilde{L}=0} = 0$  еквівалентна рівності  $Q_s \tilde{L} = \lambda^s \tilde{L}$  для деякої гладкої функції  $\lambda^s = \lambda^s(x, u)$ . Після перехресного диференціювання для кожної пари  $(s, s')$  отримуємо

$$Q_s Q_{s'} \tilde{L} - Q_{s'} Q_s \tilde{L} = Q_s (\lambda^{s'} \tilde{L}) - Q_{s'} (\lambda^s \tilde{L}) = (Q_s \lambda^{s'} - Q_{s'} \lambda^s) \tilde{L} = 0,$$

тобто  $Q_s \lambda^{s'} = Q_{s'} \lambda^s$ . Отже, існує гладка функція  $\Lambda = \Lambda(x, u)$  така, що  $\lambda^s = Q_s \Lambda$ . Тоді внаслідок зображення  $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$  із системи рівнянь  $Q_s \tilde{L} = \lambda^s \tilde{L}$  випливає, що  $L^\Phi = \tilde{\Lambda} \zeta(\Phi)$  для деякої гладкої функції  $\zeta$  від однієї змінної, де  $\tilde{\Lambda} = e^\Lambda$  — ненульова функція змінних  $x, u$ .

У другому випадку умова  $Q_s \tilde{L} = 0$  виконується для всіх змінних  $x, u$  як диференціальний наслідок припущення, що функція  $\tilde{L}$  є сталою. Покладаючи  $\tilde{\Lambda} = 1$  і  $\zeta(\Phi) = L^\Phi = \text{const}$ , отримуємо те саме рівняння  $L^\Phi = \tilde{\Lambda} \zeta(\Phi)$  з ненульовим множником  $\tilde{\Lambda}$ .

Насправді це рівняння є в точності умовою редукції рівняння  $\mathcal{L}$  за допомогою анзацу  $\Phi(x, u) = \varphi$ , що асоційований з модулем  $Q$ . Дійсно, якщо функцію  $u = u(x)$  неявно визначено цим анзацом, похідні від  $u$  (ненульового порядку) можна знайти з диференціальних наслідків рівнянь  $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$ . Тому підстановка анзацу в рівняння  $\mathcal{L}$  приводить до рівняння  $L^\Phi|_{\Phi(x,u)=\varphi} = 0$ , яке внаслідок умови редукції еквівалентне алгебраїчному рівнянню  $\zeta(\varphi) = 0$  відносно сталої  $\varphi$ .

Очевидно, що модуль  $Q$  є ультрасингулярним для рівняння  $\mathcal{L}$  тоді і лише тоді, коли функція  $\zeta$  тотожно рівна нулю.

Підсумовуючи вищенаведений розгляд, приходимо до такого твердження.

**Твердження.** *Модуль  $Q$  є  $n$ -вимірним модулем редукції диференціального рівняння  $\mathcal{L}$ :  $L[u] = 0$  відносно невідомої функції  $u$  від  $n$  незалежних змінних  $x$  тоді і лише тоді, коли цей модуль породжений векторними полями  $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$ ,  $s = 1, \dots, n$ , де функція  $\Phi = \Phi(x, u)$  задовольняє рівняння  $L^\Phi = \tilde{\Lambda} \zeta(\Phi)$ , у якому  $\tilde{\Lambda}$  — ненульова функція змінних  $x, u$ , а диференціальну функцію  $L^\Phi = L^\Phi[\Phi]$  отримано з  $L[u]$  виключенням похідних від  $u$ , використовуючи диференціальні наслідки рівнянь  $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$ . При цьому анзац  $\Phi(x, u) = \varphi$  редукує рівняння  $\mathcal{L}$  до алгебраїчного рівняння  $\zeta(\varphi) = 0$  відносно сталої  $\varphi$ .*

Більш того, справедлива така теорема.

**Теорема.** *З точністю до еквівалентності сімей розв'язків, для будь-якого диференціального рівняння  $\mathcal{L}$  однієї невідомої функції від  $n$  незалежних змінних існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його  $n$ -вимірними ультрасингулярними модулями редукції. А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно цього модуля. Задачі побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння  $\mathcal{L}$  і вичерпного опису його  $n$ -вимірних ультрасингулярних модулів редукції повністю еквівалентні.*

**Доведення.** Нехай  $Q$  —  $n$ -вимірний ультрасингулярний модуль редукції рівняння  $\mathcal{L}$ . З твердження випливає, що анзац  $\Phi(x, u) = \varphi$  побудований за допомогою модуля  $Q$ , редукує рівняння  $\mathcal{L}$  до тотожності. Іншими словами, для кожного значення сталої  $\varphi$  цей анзац неявно визначає розв'язок рівняння  $\mathcal{L}$ .

Навпаки, припустимо що  $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$  — сім'я розв'язків рівняння  $\mathcal{L}$ , яка параметризована одним параметром  $\varkappa$ . Оскільки цей параметр є суттєвим і внаслідок чого похідна  $f_\varkappa$  є ненульовою, параметр  $\varkappa$  можна виразити із співвідношення  $u = f(x, \varkappa)$ . У результаті отримуємо, що  $\varkappa = \Phi(x, u)$  для деякої функції  $\Phi = \Phi(x, u)$  з  $\Phi_u \neq 0$ . Розглянемо

модуль  $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle$ , де  $Q_s = \partial_s + \eta^s \partial_u$ , причому коефіцієнти  $\eta^s = \eta^s(x, u)$  визначено як  $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ . Це  $n$ -вимірний інволютивний модуль і  $Q[u] = 0$  для будь-якого елемента сім'ї  $\mathcal{F}$ . Анзац  $u = f(x, \varphi)$ , де  $\varphi$  — нова невідома (нуль-арна) функція, відповідає модулю  $Q$  і редукує рівняння  $\mathcal{L}$  до тотожності. Це означає, що  $Q$  — ультрасингулярний модуль редукції для рівняння  $\mathcal{L}$ .

Однопараметричні сім'ї  $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$  і  $\tilde{\mathcal{F}} = \{u = \tilde{f}(x, \tilde{\varkappa})\}$  називають еквівалентними, якщо вони складаються з тих самих функцій і відрізняються лише параметризацією, тобто якщо існує функція  $\zeta = \zeta(\varkappa)$  така, що  $\zeta_{\varkappa} \neq 0$  і  $\tilde{f}(x, \zeta(\varkappa)) = f(x, \varkappa)$ . Це виконується тоді і лише тоді, коли функції  $\Phi = \Phi(x, u)$  і  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(x, u)$ , асоційовані відповідно з сім'ями  $\mathcal{F}$  і  $\tilde{\mathcal{F}}$ , є функціонально залежними, точніше  $\tilde{\Phi} = \zeta(\Phi)$ . Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному і тому ж ультрасингулярному модулю редукції  $Q$  рівняння  $\mathcal{L}$  і, навпаки, будь-які дві однопараметричні сім'ї  $Q$ -інваріантних розв'язків є еквівалентними.

**Наслідок.** Система визначальних рівнянь на коефіцієнти ультрасингулярних модулів редукції рівняння  $\mathcal{L}$ , яка складається з рівняння (1) і рівняння  $\tilde{L} = 0$ , зводиться композицією нелокальної підстановки  $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ , де  $\Phi$  — функція змінних  $x, u$ , та перетворення годографа

$$\text{нові незалежні змінні:} \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi,$$

$$\text{нова залежна змінна:} \quad \tilde{u} = u$$

до початкового рівняння  $\mathcal{L}$  на функцію  $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$ , де  $\varkappa$  відіграє роль параметра.

Зауважимо, що редукцію диференціальних рівнянь до алгебраїчних з використанням неklasичних симетрій розглянуто в роботі [12], де отримано твердження, аналогічне виснаведеній теоремі. Але використання поняття сингулярних операторів редукції дозволяє сформулювати цей результат точніше.

Автор висловлює подяку Р. О. Поповичу за корисні дискусії та обговорення результатів роботи.

1. Bluman G. W., Cole J. D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – 18. – P. 1025–1042.
2. Kunzinger M., Popovych R. O. Singular reduction operators in two dimensions // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – 41. – 505201, 24 p.
3. Kunzinger M., Popovych R. O. Is a nonclassical symmetry a symmetry? // Proc. of 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus). – Nicosia: University of Cyprus, 2009. – P. 107–120.
4. Boyko V. M., Kunzinger M., Popovych R. O. Singular reduction modules of differential equations. – arXiv: 1201.3223.
5. Fushchych W. I., Tsyfra I. M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – 20. – L45–L48.
6. Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – 22. – P. 2915–2924.
7. Фуцич В. И., Штеленъ В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
8. Fushchych W. I., Zhdanov R. Z. Conditional symmetry and reduction of partial differential equations // Ukr. Math. J. – 1992. – 44. – P. 875–886.
9. Vorob'ev E. M. Reduction and quotient equations for differential equations with symmetries // Acta Appl. Math. – 1991. – 51. – P. 1–24.

10. *Olver P. J., Vorob'ev E. M.* Nonclassical and conditional symmetries / CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3 / Ed. by N. H. Ibragimov. – Boca Raton: CRC Press, 1996. – P. 291–328.
11. *Zhdanov R. Z., Tsyfra I. M., Popovych R. O.* A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.
12. *Grundland A. M., Tafel J.* On the existence of nonclassical symmetries of partial differential equations // J. Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 1426–1434.

*Інститут математики НАН України, Київ*

*Надійшло до редакції 12.09.2013*

**В. Н. Бойко**

### **Редукция дифференциальных уравнений к алгебраическим**

*В терминах сингулярных модулей редукции, т. е. сингулярных модулей неклассической (условной) симметрии, изучен вопрос редукции дифференциальных уравнений к алгебраическим уравнениям.*

**V. M. Boyko**

### **Reduction of differential equations to algebraic ones**

*In terms of singular reduction modules, i. e. singular modules of a nonclassical (conditional) symmetry, the question of reduction of differential equations to algebraic ones is studied.*