УДК 517.9

О. В. Капустян, академік НАН України **М. О. Перестюк**

Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем

Досліджується існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем, що мають траєкторії з нескінченною кількістю імпульсних збурень. Для параболічного нелінійно збуреного рівняння з імпульсним впливом доведено існування глобального атрактора.

Ключові слова: імпульсна динамічна система, глобальний атрактор, імпульсне збурення.

Імпульсні динамічні системи, тобто автономні системи, що зазнають імпульсних збурень при досягненні траєкторією деякої підмножини фазового простору, є важливим підкласом систем з імпульсним збуренням [1, 2]. Якісна теорія таких систем розглядалася в багатьох роботах (див. [1–6] і посилання в них). У роботі [6] на підставі припущення про скінченну кількість імпульсних збурень вздовж кожної траєкторії запропоновано означення глобального атрактора імпульсної динамічної системи як компактної, інваріантної, рівномірно притягуючої множини фазового простору, що не перетинається з множиною імпульсного збурення. В даній роботі розглядаються нескінченновимірні розривні динамічні системи з нескінченною кількістю імпульсних збурень вздовж траєкторій. Показано, що для таких систем більш природним є означення глобального атрактора, як компактної мінімальної рівномірно притягуючої множини [7–10]. Основним результатом роботи є доведення існування глобального атрактора для імпульсної динамічної системи, породженої нелінійно збуреним параболічним рівнянням, траєкторії якої зазнають нескінченної кількості імпульсних збурень.

Нехай (X, ρ) — метричний простір, $\beta(X)$ — обмежені підмножини X. Під динамічною системою (ДС) будемо розуміти пару (X, G), де відображення $G\colon R_+ \times X \mapsto X$ задовольняє напівгрупову властивість:

$$\forall x \in X \qquad G(0, x) = x, \qquad G(t + s, x) = G(t, G(s, x)) \qquad \forall t, s \geqslant 0.$$

На відміну від класичного означення ДС, на G не накладаються умови неперервності.

Означення. $A \subset X$ називається глобальним атрактором ДС (X, G), якщо:

1) A — компакт;
2) A — рівномірно притягуюча, тобто $\forall B \in \beta(X) \operatorname{dist}(G(t, B), A) \to 0$, $t \to \infty$;
3) A — мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 2.

Теорема 1 [7–10]. *Нехай для ДС (X, G) виконана умова дисипативності:*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \qquad \forall B \in \beta(X) \qquad \exists T = T(B) \qquad \forall t \geqslant T \qquad G(t, B) \subset B_0. \tag{1}$$

Тоді ДС (X, G) має глобальний атрактор тоді і тільки тоді, коли G є асимптотично компактною, тобто виконана умова

$$\forall \{x_n\} \in \beta(X) \quad \forall \{t_n \nearrow \infty\} \quad \text{послідовність} \quad \{G(t_n, x_n)\} \quad \text{є передкомпактною.} \tag{2}$$

Перейдемо до опису ДС, що породжується імпульсною системою. Нехай у фазовому просторі X задана неперервна напівгрупа $V\colon R_+ \times X \mapsto X$, непорожня замкнена множина $M \subset X$ і відображення $I\colon M \mapsto X$. Фазова точка $x(t)$, рухаючись по траєкторіях V, в момент τ досягнення множини M зазнає імпульсного впливу і опиняється в положенні $Ix(\tau)$. Нехай виконані такі умови:

$$M \bigcap I(M) = \varnothing, \qquad \forall x \in M \qquad \exists \tau = \tau(x) > 0 \qquad \forall t \in (0, \tau) \qquad V(t,x) \notin M. \tag{3}$$

Введемо позначення: $\forall x \in M\ Ix = x^+$, $\forall x \in X\ M^+(x) = \Big(\bigcup\limits_{t>0} V(t,x)\Big) \bigcap M$.

Тоді якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то існує момент часу $s := \phi(x) > 0$ такий, що

$$\forall t \in (0,s) \qquad V(t,x) \notin M, \qquad V(s,x) \in M.$$

За допомогою введених позначень імпульсна динамічна система $(X, \widetilde{V})$ описується таким чином. Зафіксуємо $x \in X$. Якщо $M^+(x) = \varnothing$, то $\widetilde{V}(t,x) = V(t,x)\ \forall t \geqslant 0$. Якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(x)$, $x_1 = V(s_0, x)$

$$\widetilde{V}(t,x) = \begin{cases} V(t,x), & 0 \leqslant t < s_0, \\ x_1^+, & t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(x_1^+) = \varnothing$, то $\widetilde{V}(t,x) = V(t - s_0, x_1^+)\ \forall t \geqslant s_0$.

Якщо $M^+(x_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(x_1^+)$, $x_2 = V(s_1, x_1^+)$

$$\widetilde{V}(t,x) = \begin{cases} V(t - s_0, x_1^+), & s_0 \leqslant t < s_0 + s_1, \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1 \end{cases}$$

і т. д. У результаті маємо скінченну або нескінченну кількість імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n \geqslant 1}$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n \geqslant 0}$,

$$V(s_0, x) = x_1, \qquad V(s_n, x_n^+) = x_{n+1}, \qquad n \geqslant 1.$$

Будемо вважати виконаною таку умову:

$$\forall x \in X \qquad \widetilde{V}(t,x) \qquad \text{визначена} \qquad \forall t \in [0, +\infty), \tag{4}$$

тобто або кількість імпульсних точок не більш як скінченна, або $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n = \infty$. Тоді [4, 5] відображення $\widetilde{V} : R_+ \times X \mapsto X$ задовольняє напівгрупову властивість і нас цікавитиме глобальний атрактор ДС $(X, \widetilde{V})$. Виходячи з класичних прикладів розривних скінченно вимірних динамічних систем [1–3], будемо розглядати імпульсні збурення двох типів з параметрами $a > 0$, $\mu > 0$:

(а) X — нормований простір, $M = \{x \in X \mid \|x\| = a\}$, $Ix = (1+\mu)x$;

(б) X — гільбертів простір, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормований базис, $M = \{x \in X \mid (\psi_1, x) = a\}$, для $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k$, $Ix = (1+\mu)c_1\psi_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} c_k \psi_k$.

Спочатку покажемо, що як завгодно мале імпульсне збурення типу (а) в найпростішій нескінченновимірній ситуації руйнує глобальний атрактор.

В обмеженій області $\Omega \subset R^p$, $p \geqslant 1$, розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \Delta y, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Нехай $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в $L^2(\Omega)$ такий, що $-\Delta\psi_i = \lambda_i\psi_i$, $\psi_i \in H_0^1(\Omega)$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, $\lambda_i \to \infty$, $i \to \infty$. Задача (5) у фазовому просторі $X = L^2(\Omega)$ з нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ породжує динамічну систему (X,V), де $y(t) = V\Big(t, \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}\psi_i$. Оскільки $\forall t \geqslant 0$ $\|y(t)\| \leqslant e^{-\lambda_1 t}\|y_0\|$, то глобальним атрактором динамічної системи (X,V) є $A = \{0\}$.

Тепер розглянемо імпульсну ДС $(X,\widetilde{V})$, де

$$M = \{y \in X \mid \|y\| = \varepsilon\}, \qquad Iy = (1+\mu)y, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \mu > 0. \tag{6}$$

Лема 1. *Для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ задача* (5), (6) *породжує імпульсну динамічну систему $(X,\widetilde{V})$, що задовольняє умови* (1), (3), (4), *але не задовольняє* (2), *а отже, не має глобального атрактора.*

Тепер розглянемо задачу (5) з імпульсним збуренням типу (б), тобто

$$M = \{y \in X \mid (y,\psi_1) = a\}, \qquad I\colon M \mapsto L^2(\Omega), \tag{7}$$

для

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\psi_i \quad Iy = (\mu+1)c_1\psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i\psi_i, \qquad a > 0, \qquad \mu > 0.$$

Лема 2. *Для будь-яких $a > 0$, $\mu > 0$ задача* (5), (7) *породжує імпульсну динамічну систему $(X,\widetilde{V})$, що задовольняє умови* (1)–(4) *і має в просторі $X = L^2(\Omega)$ глобальний атрактор*

$$A = \bigcup_{t \in [0,\ln(1+\mu)]} \{(1+\mu)ae^{-t}\psi_1\} \bigcup \{0\}. \tag{8}$$

Зауваження. З формули (8) випливає, що $A \bigcap M \neq \varnothing$ і для $\xi = a\psi_1 \in A \bigcap M$, $\widetilde{V}(t,\xi) = a\psi_1 e^{-\lambda_1 t} \notin A$, тобто $\forall t > 0$ $\widetilde{V}(t,A) \not\subset A$.

Основним результатом роботи є доведення того факту, що атрактор зберігається при малих нелінійних збуреннях задачі (5), (7).

В обмеженій області $\Omega \subset R^p$, $p \geqslant 1$, розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} = \Delta y - \varepsilon f(y), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{9}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $f \in C^1(R)$, $f(0) = 0$,

$$\exists C > 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) \geqslant -C, \qquad |f(y)| \leqslant C. \tag{10}$$

Умови (10) гарантують [7–9], що для довільних $y_0 \in X = L^2(\Omega)$ задача (9) має єдиний розв'язок $y_\varepsilon \in C([0,+\infty); X)$, $y_\varepsilon(0) = y_0$, для якого справедлива оцінка

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|y_\varepsilon(t)\| \leqslant e^{-(\lambda_1 - C\varepsilon)t}\|y_0\|. \tag{11}$$

Для розв'язків (9) розглядається імпульсне збурення (7).

Теорема 2. *Для будь-яких $a > 0$, $\mu > 0$ та для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача* (9), (7) *породжує імпульсну динамічну систему $(X, \widetilde{V}_\varepsilon)$, що має глобальний атрактор $A(\varepsilon)$, причому*

$$\operatorname{dist}(A(\varepsilon), A) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{12}$$

де A задається формулою (8).

Доведення. Оскільки для будь-якого розв'язку (9) $y_\varepsilon(\cdot)$ справедлива рівність

$$\forall t \geqslant 0 \qquad (y_\varepsilon(t), \psi_1) = e^{-\lambda_1 t}(y_\varepsilon(0), \psi_1) - \varepsilon \int\limits_0^t e^{-\lambda_1(t-p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)\, dp, \tag{13}$$

то моменти імпульсного збурення $t_\varepsilon > 0$ кожної траєкторії задачі (9), (7) визначаються з рівняння

$$a = a(1+\mu)e^{-\lambda_1 t_\varepsilon} - \varepsilon \int\limits_0^{t_\varepsilon} e^{-\lambda_1(t_\varepsilon - p)}(f(y_\varepsilon(p)), \psi_1)\, dp. \tag{14}$$

За допомогою теореми про неявну функцію доведено, що існує $\varepsilon_1 \leqslant \min\left\{\dfrac{\lambda_1}{C}, \dfrac{a\lambda_1}{C|\Omega|^{1/2}}\right\}$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ і для всіх початкових даних y_0, $(y_0, \psi_1) = a(1+\mu)$ існує $t_\varepsilon > 0$ — розв'язок рівняння (14), де y_ε — розвязок (9) на $(0, t_\varepsilon)$, $y_\varepsilon(0) = y_0$. При цьому існує константа $K > 0$, що залежить лише від констант задачі (9), (7), така, що $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\left| t_\varepsilon - \frac{1}{\lambda_1}\ln(1+\mu) \right| \leqslant K\varepsilon. \tag{15}$$

Цей результат дає можливість довести дисипативність і асимптотичну компактність імпульсної ДС $(X, \widetilde{V}_\varepsilon)$, а також граничну рівність (12).

Робота виконана при грантовій підтримці ДФФД за конкурсним проектом "Грант Президента України докторам наук для здійснення наукових досліджень" № Ф62/94-2015.

Цитована література

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.
3. *Pavlidis T.* Stability of a class of discontinuous dynamical systems // Information and control. – 1966. – **9**, Iss. 3. – P. 298–322.
4. *Рожко В. Ф.* Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 6. – С. 1005–1012.

5. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Math. Stoch. Anal. – 1994. – **7**, No 4. – P. 509–523.
6. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. – 2013. – **137**. – P. 617–642.
7. *Kapustyan A. V., Perestyuk N. A.* Global attractor for an evolution inclusion with pulse influence at fixed moments of time // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, No 8. – С. 1283–1294.
8. *Iovane G., Kapustyan A. V., Valero J.* Asymptotic behaviour of reaction-diffusion equations with non-dumped impulsive effects // Nonlinear Analysis. – 2008. – **68**. – P. 2516–2530.
9. *Perestyuk M., Kapustyan O.* Long-time behaviour of evolution inclusion with non-damped impulsive effects // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2012. – **56**. – P. 89–113.
10. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J., Zgurovsky M. Z.* Structure of uniform global attractor for general non-autonomous reaction-diffusion system // Continuous and distributed systems. – 2014. – **211**. – P. 163–180.

References

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Differential equations with impulsive influence, Kiev: Vyshcha Shkola, 1987 (in Russian).
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations, Singapore: World Scientific, 1995.
3. *Pavlidis T.* Information and control, 1996, **9**: 298–322.
4. *Rozhko V. F.* Differential Equations, 1975, **11**, No 6: 1005–1012 (in Russian).
5. *Kaul S. K.* J. Appl. Math. Stoch. Anal., 1994, **7**, No 4: 509–523.
6. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Bull. Sci. Math., 2013, **137**: 617–642.
7. *Kapustyan A. V., Perestyuk N. A.* Ukr. Math. J., 2003, **55**, No 8: 1283–1294.
8. *Iovane G., Kapustyan O. V., Valero J.* Nonlinear Analysis, 2008, **68**: 2516–2530.
9. *Perestyuk M., Kapustyan O.* Mem. Differential Equations Math. Phys., 2012, **56**: 89–113.
10. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J., Zgurovsky M. Z.* Continuous and distributed systems, 2014, **211**: 163–180.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 05.06.2015

А. В. Капустян, академик НАН Украины **Н. А. Перестюк**

Существование глобальных аттракторов для импульсных динамических систем

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Исследуется существование глобальных аттракторов для импульсных динамических систем, которые имеют траектории с бесконечным числом импульсных возмущений. Для параболического нелинейно возмущенного уравнения с импульсным воздействием доказано существование глобального аттрактора.

Ключевые слова: импульсная динамическая система, глобальный аттрактор, импульсное возмущение.

O. V. Kapustyan, Academician of the NAS of Ukraine **M. O. Perestyuk**

Existence of global attractors for impulsive dynamical systems

Taras Shevchenko National University of Kiev

The existence of global attractors for impulsive dynamical systems, which have trajectories with infinite number of impulsive perturbations, is investigated. We have proved the existence of a global attractor for a parabolic equation with nonlinear perturbation.

Keywords: impulsive dynamical system, global attractor, impulsive perturbation.