ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А. К. Бахтин, И. Я. Дворак, И. В. Денега

Разделяющее преобразование в задачах об экстремальном разбиении комплексной плоскости

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Исследуются экстремальные проблемы геометрической теории функций комплексного переменного, связанные с оценками функционалов, заданных на системах неналегающих областей. В частности, основное внимание уделяется исследованию известной проблемы В. Н. Дубинина об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

Ключевые слова: внутренний радиус, неналегающие области, “свободные” полюсы, проблема В. Н. Дубинина, неравенства.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — расширенная комплексная плоскость или сфера Римана. Системой неналегающих областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$. Пусть $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [1–4]). Введем обозначения $\alpha_k := 1/\pi \arg(a_{k+1}/a_k)$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$.

В 1994 г. в работе [1] была сформулирована одна открытая экстремальная проблема о неналегающих областях со свободными полюсами. Эта задача вызвала большой интерес и изучалась во многих работах (см., например, [2–11]). Приведем ее формулировку: показать, что максимум произведения

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где B_0, B_1, B_2, $\ldots$, B_n, $n \geqslant 2$, — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ и $\gamma \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации из областей B_k и точек a_k, обладающей n-кратной симметрией.

В данный момент по этой проблеме известны только частичные результаты, в целом она не решена. При $\gamma = 1$ и $n \geqslant 2$ задача была решена в работе [2], причем из метода этой работы следует, что результат верен и при $0 < \gamma < 1$. Л. В. Ковалев [5] получил решение данной проблемы при некоторых ограничениях на геометрию расположения систем точек на единичной окружности, а именно для $n \geqslant 5$ и подкласса систем точек, удовлетворяющих условию $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$. Ясно, что эти условия являются достаточно жесткими, существенно сужающими множество допустимых конфигураций. Следует отметить, что результат работы [5] интересен как сам по себе, так и методом исследования. Кроме того, из работы [5] непосредственно следует, что результат [2, теорема 4] справедлив при всех $\gamma \in (0, 1]$. В [6] в случае односвязных областей эта задача также изучалась при $\gamma \in (0, 1]$. В [10] получено решение вышеуказанной задачи при $n \geqslant 2$ и $0 < \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$, а также для $0 < \gamma \leqslant n^{\alpha}$, где $1/3 < \alpha < 2/3$, начиная с некоторого явного номера $n = n(\alpha)$. Развивая методы работ [2, 4, 5, 11] и используя ряд дополнительных соображений, удалось получить следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}45}$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и любого набора взаимно неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0,n}$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

Согласно методу работы [4, с. 255], имеем

$$J_n(\gamma) = \prod_{k=1}^{n} [r(B_0, 0) r(B_k, a_k)]^{\gamma/n} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\gamma/n}.$$

Используя рассуждения работ [4, с. 256; 10, 11], получаем следующее соотношение:

$$J_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 \left(\frac{2 - \alpha_0}{n - 1}\right)^{n-1}\right]^{1-\gamma/n},$$

где $\alpha_0 = \max\limits_{k} \alpha_k$, причем $\alpha_0 \geqslant 2/\sqrt{\gamma}$. С другой стороны, известно (см. [4, 5]), что

$$J_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\dfrac{4\gamma}{n^2}\right)^{\gamma/n}}{\left(1 - \dfrac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n}} \left(\frac{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Рассмотрим величину $O_n(\gamma) = J_n(\gamma)/J_n^0(\gamma)$ для случая, когда $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$. Выполняя несложные преобразования, получаем

$$O_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma((n-1)/n)} \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\gamma/n} \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\gamma/n} \times$$
$$\times \left(\frac{1 + \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 - \dfrac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\gamma/n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma((n-1)/n)}.$$

Аналогично работам [4, с. 255–259; 10, 11], исследуем оценку каждого из множителей $O_n(\gamma)$ по стандартной схеме и, таким образом, показываем, что $J_n(\gamma) < J_n^0(\gamma)$ при $\gamma \in (1, n^{0,45}]$, $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $n \geqslant 12$. А это означает, что при данных значениях параметров нет экстремальных конфигураций. Остается исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. Используя результаты [4, 10, 11], получаем неравенство

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-n/2} \left[\prod_{k=1}^{n} P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2},$$

где

$$P(x) = 2^{x^2+6} x^{x^2+2} (2-x)^{-(2-x)^2/2} (2+x)^{-(2+x)^2/2}, \qquad x \in (0, 2].$$

Далее, применяя рассуждения работы [5], получаем утверждение теоремы 1.

Наряду с вышеизложенной проблемой получена оценка функционала $J_n(\gamma)$ на более широком интервале значений параметра δ при $\gamma \in (0; 1{,}756465]$ и $n \geqslant 5$. Пусть

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} x^{x^2+2-2\delta} (2-x)^{-(2-x)^2/2} (2+x)^{-(2+x)^2/2},$$
$$x \in (0, 2], \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7.$$

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = 1{,}756465$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7$. Тогда для любой системы различных точек единичной окружности $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого набора взаимно неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \gamma^{-\delta n/2} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\delta} \left[F_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{n/2}.$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается при условиях теоремы 1.

При доказательстве теоремы 2 существенно используются идеи доказательства [2, теорема 4; 5] и свойства разделяющего преобразования [1–3]. Повторяя рассуждения, приведенные в [4] при доказательстве теоремы 5.2.3, получаем следующее неравенство:

$$J_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\delta n/2} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{\delta} \left[\prod_{k=1}^{n} F_\delta\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}, \qquad \delta \in [0; 0{,}7].$$

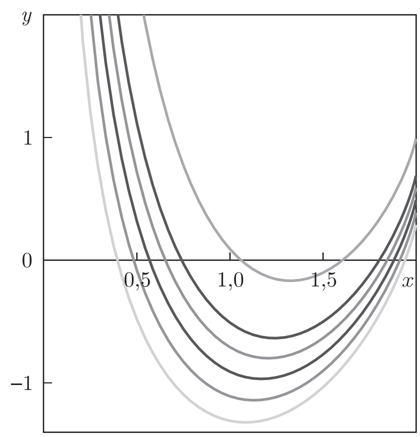

Рис. 1. График функции $y = \Psi'_\delta(x)$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n} F_\delta(x_k) \longrightarrow \max, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \qquad x_k = \alpha_k\sqrt{\gamma},$$
$$0 < x_k \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7.$$

Пусть $\Psi_\delta(x) = \ln(F_\delta(x))$ и $X^{(0)} = \{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ — произвольный экстремальный набор точек вышеуказанной задачи. Аналогично [5] справедливо утверждение: если $0 < x_k^{(0)} < x_j^{(0)} < 2$, $k \neq j$, то имеет место следующее соотношение:

$$\Psi'_\delta(x_k^{(0)}) = \Psi'_\delta(x_j^{(0)}), \tag{1}$$

где $k,\ j = \overline{1,n}$, $k \neq j$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7$. Нужно показать, что на основании соотношения (1) при условиях теоремы 2 выполняется равенство

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}.$$

Пусть $\sigma_1 := \sigma_1(\delta,\gamma) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^{(0)}(\delta,\gamma)$, $\sigma_0 := \sigma_0(\delta,\gamma) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k^{(0)}(\delta,\gamma)$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_k \leqslant \sigma_0$, $k = \overline{1,n}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7$, $\gamma \in (0; 1{,}756465]$.

Функция

$$\Psi'_\delta(x) = 2x\ln(2x) + (2-x)\ln(2-x) - (2+x)\ln(2+x) + \frac{2}{x} - \frac{2\delta}{x}$$

убывает на промежутке $(0, x_0(\delta,\gamma)]$, $x_0(0{,}7;\gamma) \leqslant x_0(\delta,\gamma) \leqslant x_0(0,\gamma)$, $(x_0(0{,}7;\gamma) \approx 1{,}08441$, $x_0(0,\gamma) \approx 1{,}324664)$ и возрастает на $[x_0(\delta,\gamma), 2)$ (рис. 1).

Функция $\Psi''_\delta(x)$ строго возрастает на $(0,2)$ при каждом фиксированном δ. Таким образом, выполняется соотношение $\operatorname{sign}\Psi''_\delta(x) \equiv \operatorname{sign}(x - x_0(\delta,\gamma))$.

Если $\sigma_0 \leqslant x_0(\delta,\gamma)$, то в силу строгой монотонности $\Psi'_\delta(x)$ на $[0, x_0(\delta,\gamma)]$ получаем, что $x_1^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Предположим, что $x_0(\delta,\gamma) < \sigma_0 \leqslant 1{,}62$. Тогда для $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0; 1{,}756465]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7$, имеем $\sigma_1 < 0{,}391556$. В силу убывания $\Psi'_\delta(x)$ на $(0, x_0(\delta,\gamma))$ следует, что

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0{,}391556) > \Psi'_{0,7}(0{,}391556) = 0{,}020031 > 0{,}018707 = \Psi'_0(1{,}62) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Таким образом, $\sigma_0 \notin [x_0(\delta,\gamma); 1{,}62)$.

Пусть $1{,}62 < \sigma_0 \leqslant 2$. Тогда для $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0; 1{,}756465]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}7$, имеем $\sigma_1 < 0{,}257658$. То есть

$$\Psi'_\delta(\sigma_1) > \Psi'_\delta(0{,}257658) > \Psi'_{0,7}(0{,}257658) = 1{,}115953 > 1 = \Psi'_0(2) \geqslant \Psi'_\delta(\sigma_0).$$

Таким образом, $\sigma_0 \notin [x_0(\delta,\gamma); 2)$. Следовательно, для экстремального набора $\{x_k^{(0)}\}_{k=1}^n$ возможен только случай $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Отсюда справедливо соотношение

$$\prod_{k=1}^n F_\delta\Big(\alpha_k\sqrt{\gamma}\Big) \leqslant \left[F_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^n,$$

что доказывает теорему 2.

При условиях $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0; 0{,}4375]$, $\delta = 0$ из теоремы 2 получаем теорему 1 [7]. Если $\gamma \in (0,1]$, $\delta = 1/2$, то из теоремы 2 следуют результаты работ [8, 9]. При $n \geqslant 3$, $\gamma \in (0,1]$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0{,}6$ из теоремы 2 получаем теорему работы [12].

Цитированная литература

1. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1. – С. 3–76.
2. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1988. – **168**. – С. 48–66.
3. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: “Дальнаука” ДВО РАН, 2009. – 390 с.
4. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 308 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 73).
5. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. матем. сб. – 1996. – **2**. – С. 96–98.
6. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52–67.
7. *Бахтина Г. П., Бахтин А. К.* Разделяющее преобразование и задачи о неналегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 273–281.
8. *Подвысоцкий Р. В.* Об одном неравенстве для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 33–37.
9. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Денега И. В.* Неравенства в задачах о неналегающих областях // arXiv: 1108.2383.
10. *Заболотний Я. В.* Задача про обчислення максимуму добутку внутрішніх радіусів неперетинних областей на комплексній площині // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 557–564.
11. *Бахтин А. К., Денега И. В.* Об одной проблеме В. Н. Дубинина // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 401–411.
12. *Денега И. В.* Об одной экстремальной задаче о частично налегающих областях // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 4–5. – С. 439–446.

References

1. *Dubinin V. N.* Uspekhi Mat. Nauk, 1994, **49**, No 1: 3–76 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 1994, **49**, No 1: 1–79.
2. *Dubinin V. N.* Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 1988, **168**: 48–66 (in Russian); translation in J. Soviet Math., 1991, **53**, No 3: 252–263.
3. *Dubinin V. N.* Capacities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables, Vladivostok: Dal'nayka, 2009 (in Russian).
4. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Zelinskii Yu. B.* Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis, Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2008 (in Russian).
5. *Kovalev L. V.* Dal'nevost. Mat. Sb., 1996, **2**: 96–98 (in Russian).
6. *Kuz'mina G. V.* Zap. Nauchn. Semin. POMI, 2003, **302**: 52–67 (in Russian); translation in J. Math. Sci., 2005, **129**, Iss. 3: 3843–3851.
7. *Bakhtina G. P., Bakhtin A. K.* Proc. of the Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, 2006, **3**, No 4: 273–281 (in Russian).
8. *Podvisotskii R. V.* Dop. NAN Ukraine, 2009, No 12: 33–37 (in Russian).
9. *Bakhtin A. K., Bakhtina G. P., Denega I. V.* arXiv:1108.2383 (in Russian).
10. *Zabolotnii Y. V.* Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2013, **10**, No 4–5: 557–564 (in Ukrainian).
11. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Proc. of the Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, 2013, **10**, No 4–5: 401–411 (in Russian).
12. *Denega I. V.* Proc. of the Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2013, **10**, No 4–5: 439–446 (in Russian).

Институт математики НАН Украины, Киев
Поступило в редакцию 16.06.2015

О. К. Бахтін, І. Я. Дворак, І. В. Денега

Розділяюче перетворення в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини

Інститут математики НАН України, Київ

Досліджуються екстремальні проблеми геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язані з оцінками функціоналів, заданих на системах областей, що не перетинаються. Зокрема, основна увага приділяється дослідженню відомої проблеми В. М. Дубиніна про екстремальне розбиття комплексної площини.

Ключові слова: внутрішній радіус, області, що не перетинаються, "вільні" полюси, проблема В. М. Дубиніна, нерівності.

A. K. Bakhtin, I. Y. Dvorak, I. V. Denega

A separating transformation in the problems of extremal decomposition of the complex plane

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

Some extremal problems of the geometric theory of functions of complex-valued variable which are associated with estimates of functionals defined on systems of disjoint domains are studied. In particular, the main attention is paid to the investigation is the well-known Dubinin problem of extremal decomposition of the complex plane.

Keywords: inner radius, disjoint domains, "free" poles, Dubinin's problem, inequalities.