

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

## О состоянии предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

*Изучено состояние предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной нормального отрыва при наличии зоны предразрушения. В результате численного решения соответствующей краевой задачи установлено влияние длины трещины на поля перемещений и деформаций. Выявлены особенности этих полей в окрестности трещины и зоны предразрушения.*

**Ключевые слова:** нелинейное анизотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, критерий прочности.

В настоящей работе изучается состояние предельного равновесия нелинейного анизотропного тела с трещиной нормального отрыва при наличии зоны предразрушения. В частности, исследуется влияние длины трещины на ее раскрытие в вершине, а также на деформации в конце зоны предразрушения. Как и в работе [1], принимается, что размеры зоны предразрушения не зависят от длины трещины и внешней нагрузки на тело. Постановка краевой задачи осуществляется в компонентах вектора перемещений.

**Постановка краевой задачи.** Для постановки краевой задачи потребуются определяющие уравнения, связывающие компоненты тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с компонентами тензора деформаций  $\mathbf{D}$ .

Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями [2]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Аргументом функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  является величина

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты  $Z$ ,  $E$  и  $\Xi$  таковы:

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Отметим, что тензор  $\mathbf{F}$  и тензор  $\mathbf{G}$ , обратный тензору  $\mathbf{F}$ , характеризуют анизотропию. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иначе говоря, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Следуя [2], функцию  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  примем такой:

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \in [0, v]; \\ \frac{\Omega - v - a \ln\left(\frac{\Omega - v}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \Omega \in [v, \psi]. \end{cases} \quad (4)$$

В дальнейшем потребуется также критерий прочности.

Воспользуемся критерием прочности [2]:

$$\Omega = \psi. \quad (5)$$

Как показано в статье [2], при нарушении прочности плотность энергии, расходуемой на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает значение  $\Psi$ :

$$\Psi = v \left( \psi - \frac{v}{2} \right) + a^2 \left\{ \left( \frac{\psi - v}{a} + 1 \right) \left[ \ln \left( \frac{\psi - v}{a} + 1 \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (6)$$

Будем считать, что система координат  $x^1, x^2, x^3$ , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (7)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещений  $\mathbf{u}$ .

Воспользуемся соотношениями Коши [3]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} \quad (\varepsilon, \zeta). \quad (8)$$

Привлекая соотношения (8), запишем уравнения (1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (9)$$

С учетом соотношений (8) второй и третий из инвариантов (3) выразим так:

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (10)$$

Ограничимся рассмотрением ортотропного тела. Главные направления примем совпадающими с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ .

Остановимся на случае обобщенного плоского напряженного состояния, полагая, что

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 1, 2); \quad (11)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \beta = 3; \alpha = 3, \beta = 1, 2; \alpha = 3, \beta = 3). \quad (12)$$

В соответствии с равенствами (7) первый из инвариантов (10) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (13)$$

Так как  $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$ , то, в силу равенств (12) и (7), из уравнений (9) следует, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, 2, \delta = 3; \gamma = 3, \delta = 1, 2). \quad (14)$$

Используем обозначения

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \mu_{AA}, & G^{1212} &\equiv \mu_{BB}, & G^{1122} &\equiv \mu_{AD}, & G^{2222} &\equiv \mu_{DD}, \\ G^{1133} &\equiv \mu_{AF}, & G^{2233} &\equiv \mu_{DF}, & G^{3333} &\equiv \mu_{FF}. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно равенствам (14) и обозначениям (15), второй из инвариантов (10) примет вид

$$\begin{aligned} \Xi = & \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \\ & + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ & + \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая равенства (12) и (7) на основании уравнений (9) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (17)$$

Опираясь на равенства (7) и выражение (17), в соответствии с уравнениями (9) будем иметь

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} = & \left( G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left( G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \\ & - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \left( G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left( G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \right. \\ & \left. - \left( 1 - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} \right) \frac{E}{Z} \right] \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha = \beta); \end{aligned} \quad (18)$$

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta). \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\frac{G^{1133}}{G^{3333}} \equiv \xi_{AF}, \quad \frac{G^{2233}}{G^{3333}} \equiv \xi_{DF}; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} & \equiv \check{\mu}_{AA}, & G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} & \equiv \check{\mu}_{AD}, \\ G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} & \equiv \check{\mu}_{DA}, & G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} & \equiv \check{\mu}_{DD}. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользуемся уравнениями Навье [3]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (22)$$

Допустим, что тело является однородным. Принимая во внимание формулы (11) и равенства (12), используя уравнения (18), (19) и учитывая второе из обозначений (15), а также обозначения (20) и (21), на основании уравнений (22) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} & = Q^1; \\ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} & = Q^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q^1 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\
&+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^1} \right]; \\
Q^2 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \mathbf{E} \right) + \\
&+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x^2} \right].
\end{aligned} \tag{24}$$

На поверхностях тела и трещины зададим вектор напряжений  $\mathbf{P}$  с компонентами  $P^\alpha$ . Воспользуемся граничными условиями [3]

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \tag{25}$$

где  $n_\beta$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Принимая во внимание равенства (12), используя уравнения (18), (19) и учитывая второе из обозначений (15), а также обозначения (20) и (21), на основании условий (25) получим

$$\begin{aligned}
\left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\
\mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
R^1 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \mathbf{E} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right]; \\
R^2 &= \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \mathbf{E} \right) n_2 \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

Коснемся вопроса моделирования зоны предразрушения.

При нагружении тела у вершины трещины образуется зона предразрушения — узкая область на продолжении трещины, в которой начинается разрушение. Заменяем эту зону разрезом, к поверхностям которого приложены некоторые напряжения, подлежащие определению в ходе решения соответствующей краевой задачи.

Разумеется, компоненты  $P^\alpha$ , действующие по поверхностям разреза, должны зависеть от координат  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ .

Предположим, что зависимости компонент  $P^\alpha$  от координат  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  могут быть представлены так:

$$P^\alpha = C^\alpha + C_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} x^\beta + C_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha\cdot\cdot} x^\beta x^\gamma + C_{\cdot\beta\gamma\delta}^{\alpha\cdot\cdot\cdot} x^\beta x^\gamma x^\delta, \tag{28}$$

где  $C^\alpha$ ,  $C_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ ,  $C_{\cdot\beta\gamma}^{\alpha\cdot\cdot}$ ,  $C_{\cdot\beta\gamma\delta}^{\alpha\cdot\cdot\cdot}$  — компоненты некоторых тензоров с первого по четвертый ранг.

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси  $x^1$ ,  $x^2$ .

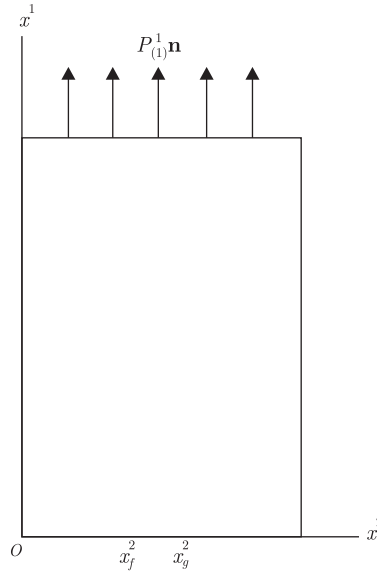


Рис. 1

На поверхностях тела и трещины зададим компоненты  $P^1, P^2$ . Сделаем это симметрично относительно осей  $x^1, x^2$ . Поэтому будет достаточно рассмотреть лишь четвертую часть тела, например, располагающуюся в первом квадранте (рис. 1).

Очевидно, что в конце разреза

$$u_1 = 0. \quad (29)$$

Выделим около конца разреза точку с координатами  $a^1, a^2$ . Будем полагать, что в этой точке существуют все частные производные (до второго порядка включительно) от компоненты  $u_2$  по координатам  $x^1, x^2$ .

Координаты конца разреза запишем следующим образом:  $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$ .

Составляя кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ , установим

$$\begin{aligned} -u_2 + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Ввиду симметрии относительно оси  $x^2$  из компонент вектора  $\mathbf{P}$ , действующих по верхней поверхности разреза, отличной от нуля будет только компонента  $P^1$ .

Пусть координата  $x^2$  начала разреза (точки  $A$ ) будет  $x_f^2$ , а конца разреза (точки  $B$ ) —  $x_g^2$ .

Согласно формулам (28), зависимость компоненты  $P^1$  от координаты  $x^2$  имеет вид

$$P^1 = C^1 + C_{.2}^1 x^2 + C_{.22}^1 x^2 x^2 + C_{.222}^1 x^2 x^2 x^2. \quad (31)$$

Примем, что

$$P^1|_{x^2=x_f^2} = P_A^1; \quad P^1|_{x^2=x_g^2} = P_B^1. \quad (32)$$

Дифференцируя формулу (31) по  $x^2$ , получим

$$\frac{\partial P^1}{\partial x^2} = C_{.2}^{1..} + 2C_{.22}^{1..}x^2 + 3C_{.222}^{1...}x^2x^2. \quad (33)$$

Положим, что

$$\frac{\partial P^1}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_f^2} = 0; \quad \frac{\partial P^1}{\partial x^2} \Big|_{x^2=x_g^2} = 0. \quad (34)$$

Используя формулу (31) и условия (32), а также формулу (33) и условия (34), найдем

$$C^1 = \frac{P_A^1(3x_f^2 - x_g^2)(x_g^2)^2 - P_B^1(3x_g^2 - x_f^2)(x_f^2)^2}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad (35)$$

$$C_{.2}^{1..} = \frac{6(P_B^1 - P_A^1)x_f^2x_g^2}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad C_{.22}^{1..} = -\frac{3(P_B^1 - P_A^1)(x_g^2 + x_f^2)}{(x_f^2 - x_g^2)^3}, \quad C_{.222}^{1...} = \frac{2(P_B^1 - P_A^1)}{(x_f^2 - x_g^2)^3}.$$

Ниже сосредоточимся на состоянии предельного равновесия, приравнявая  $P_A^1$  нулю.

**Числовой пример.** Исследовано влияние длины трещины на ее раскрытие в вершине, а также на деформации в конце зоны предразрушения.

Заданы существенные компоненты тензора  $\mathbf{F}$ :

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1},$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}.$$

На основе этих значений получены существенные компоненты тензора  $\mathbf{G}$ :

$$G^{1111} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1122} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1133} = 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{1212} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{1313} = 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2222} = 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$G^{2233} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{2323} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad G^{3333} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}.$$

Кроме того, заданы постоянные  $v$  и  $\psi$ , а также коэффициент  $a$ :

$$v = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}, \quad \psi = 93,50 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 1,1112866 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}.$$

По формуле (6) вычислено  $\Psi$ :  $\Psi = 645,97 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

Наконец, заданы

$$x_f^2 = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \dots, \quad 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad -\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для длин трещины,  $l_R$ , и разреза,  $l_S$ , имеем

$$l_R = x_f^2; \quad l_S = x_g^2 - x_f^2.$$

Подчеркнем, что длина разреза оставалась неизменной, равной  $0,16 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Из компонент вектора напряжений отличной от нуля была исключительно компонента  $P^1$  на верхней поверхности тела (см. рис. 1).

При решении краевой задачи, следовало определить  $P_{(1)}^1$ , требуя, чтобы в точке  $B$  соблюдался критерий (5), а  $\Psi$  составляло  $645,97 \cdot 10^4$  Па.

В общей сложности решение краевой задачи найдено для шести вариантов, различающихся длиной трещины. В каждом из этих вариантов  $P_{(1)}^1$  варьировалась.

При решении краевой задачи (для каждого из значений  $P_{(1)}^1$ ) учитывалось, что в точке  $B$  компонента  $S^{11}$  должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = |P_B^1|. \quad (36)$$

Не известная заранее  $P_B^1$  определялась за несколько итераций. Изначально она задавалась.

Компонента  $P^1$  на верхней поверхности разреза вычислялась по формулам (35) и (31).

Затем по уравнениям (29), (30) и (23), а также (26) численно отыскивались компоненты  $u_1, u_2$ . При этом применялся метод последовательных приближений Ильюшина [4]. В первом приближении величины  $Q^1, Q^2$  и  $R^1, R^2$  полагались равными нулю, а в каждом последующем приближении рассчитывались (с учетом формул (24) и (27), а также формул (4), (2), инвариантов (13) и (16), выражения (17)) на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в предыдущем приближении. После этого по первому из уравнений (18) вычислялась компонента  $S^{11}$  в точке  $B$ . Если она не удовлетворяла равенству (36), то значение  $P_B^1$  корректировалось, и вся процедура повторялась.

Итак, для каждой длины трещины найдены компоненты  $u_1, u_2$ .

Наиболее интересны значения компонент  $u_1, u_2$  в точке  $A$  (табл. 1).

Прежде всего констатируем, что увеличение длины трещины с  $1,00 \cdot 10^{-2}$  м до  $1,50 \cdot 10^{-2}$  м повлекло за собой уменьшение  $P_{(1)}^1$  с  $7,7791 \cdot 10^7$  Па до  $5,8014 \cdot 10^7$  Па. К тому же, оно вызвало уменьшение  $u_1^A$  с  $2,5072 \cdot 10^{-5}$  м до  $2,4409 \cdot 10^{-5}$  м. При этом  $u_2^A$  изменилась более значительно, уменьшившись с  $-1,7271 \cdot 10^{-5}$  м до  $-2,1527 \cdot 10^{-5}$  м.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что, несмотря на существенное изменение длины трещины,  $u_1^A$  изменилась мало. Таким образом, вне зависимости от длины трещины ее раскрытие в вершине, равное  $2u_1^A$ , оставалось приблизительно одним и тем же.

Далее для каждой длины трещины по соотношениям (8) вычислены компоненты  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$ .

Особый интерес вызывают значения компонент  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$  в точке  $B$  (табл. 2).

Как видим, увеличение длины трещины с  $1,00 \cdot 10^{-2}$  м до  $1,50 \cdot 10^{-2}$  м привело к уменьшению  $D_{11}^B$  с  $20,751 \cdot 10^{-3}$  до  $20,437 \cdot 10^{-3}$  и увеличению  $D_{22}^B$  с  $17,756 \cdot 10^{-3}$  до  $18,047 \cdot 10^{-3}$ . При этом  $D_{33}^B$  изменилась гораздо менее заметно, увеличившись с  $-35,388 \cdot 10^{-3}$  до  $-35,370 \cdot 10^{-3}$ .

Таблица 1

$l_R \cdot 10^2, \text{ м}$	$P_{(1)}^1 \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$	$u_1^A \cdot 10^5, \text{ м}$	$u_2^A \cdot 10^5, \text{ м}$
1,00	7,7791	2,5072	-1,7271
1,10	7,3535	2,4876	-1,8182
1,20	6,9451	2,4712	-1,9061
1,30	6,5518	2,4579	-1,9911
1,40	6,1713	2,4478	-2,0732
1,50	5,8014	2,4409	-2,1527

Таблиця 2

$l_R \cdot 10^2, \text{ м}$	$D_{11}^B \cdot 10^3$	$D_{22}^B \cdot 10^3$	$D_{33}^B \cdot 10^3$
1,00	20,751	17,756	-35,388
1,10	20,650	17,850	-35,382
1,20	20,569	17,925	-35,378
1,30	20,506	17,983	-35,374
1,40	20,463	18,023	-35,371
1,50	20,437	18,047	-35,370

Представляется важным тот факт, что, невзирая на существенное изменение длины трещины,  $D_{33}^B$  не претерпела ощутимых изменений.

Заметим, что компонента  $D_{33}$  принимает в точке  $B$  минимальное значение. Следовательно, зная из эксперимента компоненту  $D_{33}$  в различных точках перед трещиной, можно обнаружить точку  $B$ , установив, тем самым, длину зоны предразрушения.

### Цитированная литература

1. *Kaminsky A. A., Kurchakov E. E.* Modeling the fracture process zone near a crack tip in a nonlinear elastic body // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, No 6. – P. 735–744.
2. *Курчаков Е. Е.* Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела // *Доп. НАН України.* – 2015. – № 9. – С. 46–53.
3. *Love A.* Treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. – 674 p.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – Москва; Ленинград: ОГИЗ, 1948. – 376 с.

### References

1. *Kaminsky A. A., Kurchakov E. E.* *Int. Appl. Mech.*, 2011, **47**, No 6: 735–744.
2. *Kurchakov E. E.* *Dop. NAN Ukraine*, 2015, No 9: 46–53 (in Russian).
3. *Love A.* *Treatise on the mathematical theory of elasticity*; Cambridge: Univ. Press, 1927.
4. *Il'yushin A. A.* *Plasticity*, Moscow; Leningrad: OGIZ, 1948 (in Russian).

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 21.05.2015*

**А. О. Камінський, Є. Є. Курчаков**

### **Про стан граничної рівноваги нелінійного анізотропного тіла з тріщиною**

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*Вивчено стан граничної рівноваги нелінійного анізотропного тіла з тріщиною нормального відриву за наявності зони передруйнування. В результаті чисельного розв'язання відповідної крайової задачі встановлено вплив довжини тріщини на поля переміщень і деформацій. Виявлено особливості цих полів в околі тріщини та зони передруйнування.*

**Ключові слова:** нелінійне анізотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, критерій міцності.

A. A. Kaminsky, E. E. Kurchakov

## On the limiting equilibrium state of a nonlinear anisotropic body with a crack

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

*The limiting equilibrium state of a nonlinear anisotropic body with a mode I crack in the presence of a prefracture zone is studied. By the numerical solving of the associated boundary-value problem, it is established how the crack length influences the displacement and deformation fields. Features of these fields in vicinities of the crack and the prefracture zone are revealed.*

**Keywords:** nonlinear anisotropic body, mode I crack, prefracture zone, strength criterion.