



УДК 539.3

Г. В. Тонкошкур

## Особливості розподілу механічних полів у пружному середовищі з тонким жорстким включенням у формі незамкненої сферичної оболонки

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Розглядається метод дослідження механічних полів у просторовій задачі теорії пружності з тонким жорстким сферичним включенням довільного кута розхилу та аналогічної задачі гідромеханіки для обтікання вказаного включення стоксовою рідиною.

**Ключові слова:** теорія пружності, незамкнене сферичне включення, рідина Стокса.

**Постановка задачі.** Розглядається осесиметрична задача про рівновагу пружного простору з тонким жорстким включенням у формі сферичної незамкненої оболонки довільного кута розхилу (рис. 1). Загальний розв'язок цієї задачі, побудований із застосуванням методу власних вектор-функцій, подано в роботі [1]. Використання аналогічного підходу для побудови розв'язку задачі про повільне обтікання такої оболонки в'язкою рідиною Стокса обґрунтовано в [2].

Радіальні, тангенціальні переміщення та напруження внутрішньої задачі наводяться у вигляді рядів

$$\begin{aligned}2\mu U_r^{(1)}(r, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [nA_n r^{n+1} + B_n r^{n-1}] P_n(\cos \vartheta), \\2\mu U_{\vartheta}^{(1)}(r, \vartheta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+3)A_n r^{n+1} + (n+1)B_n r^{n-1}] \frac{P_n^{(1)}(\cos \vartheta)}{n(n+1)}, \\ \sigma_r^{(1)}(r, \vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1) - 3)A_n r^n + (n-1)B_n r^{n-2}] P_n(\cos \vartheta), \\ \tau_{r\vartheta}^{(1)}(r, \vartheta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [n((n-1)(n+3) + 3)A_n r^n + (n^2 - 1)B_n r^{n-2}] \frac{P_n^{(1)}(\cos \vartheta)}{n(n+1)},\end{aligned}\tag{1}$$

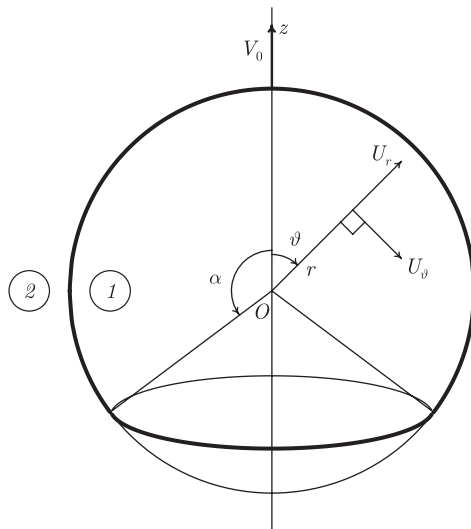


Рис. 1. Незамкнена сферична оболонка

де  $A_n, B_n$  — довільні сталі, які визначаються з граничних умов. Розв'язок зовнішньої задачі отримується із наведених вище формул заміною  $n$  на  $-(n+1)$  і, послідовно,  $A_{-n-1}$  на  $-C_n$ ,  $B_{-n-1}$  на  $-D_n$ ,  $P_{-n-1}^{(0,1)}(\cos \vartheta)$  на  $P_n^{(0,1)}(\cos \vartheta)$ .

Вказані розв'язки повинні задовольняти умови неперервності внутрішнього і зовнішнього полів переміщень і напружень (індекси 1 і 2) поза незамкненою сферичною оболонкою довільного кута розхилу ( $r = r_0$ ,  $\alpha < \vartheta \leq \pi$ )

$$U_r^{(1)} = U_r^{(2)}, \quad U_\vartheta^{(1)} = U_\vartheta^{(2)}, \quad \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)} = \tau_{r\vartheta}^{(2)} \quad (2)$$

та граничні умови на поверхні жорсткого включення ( $r = r_0$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \alpha$ )

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} = U_r^{(2)} &= \cos \vartheta V_0, & U_\vartheta^{(1)} = U_\vartheta^{(2)} &= -\sin \vartheta V_0, \\ \sigma(\vartheta) = \sigma_r^{(1)} - \sigma_r^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} p_n P_n(\cos \vartheta), \\ \tau(\vartheta) = \tau_{r\vartheta}^{(1)} - \tau_{r\vartheta}^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} q_n \frac{P_n^{(1)}(\cos \vartheta)}{n(n+1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $p_n, q_n$  — щільності в розкладах за поліномами Лежандра невідомих стрибків радіальних і тангенціальних напружень на поверхні незамкненої сферичної оболонки

$$p_n = \int_0^\alpha \sigma(\xi) P_n(\cos \xi) \sin \xi d\xi, \quad q_n = \int_0^\alpha \tau(\xi) P_n^{(1)}(\cos \xi) \sin \xi d\xi. \quad (4)$$

**Побудова точного розв'язку задачі.** Для побудови точного розв'язку спочатку до розгляду вводяться зображення від невідомих стрибків напружень у вигляді інтегралів Абеля, а поліноми Лежандра подаються через інтегральні зображення Мелера–Діріхле.

Подальші доволі громіздкі перетворення дозволяють звести запис граничних умов до системи парних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду [3]. Шляхом послідовного диференціювання цих рівнянь вдалося істотно спростити цю систему та знайти сталі вихідних представлень загального розв'язку (1)

$$\begin{aligned}
 A_n r_0^n &= -A \frac{n+1}{4(2n+1)(2n+3)} \left\{ -\sin(n-1)\alpha + (5n+1) \frac{\sin(n+2)\alpha}{n+2} + \right. \\
 &\quad \left. + [3(2n+1) + n(2\cos\alpha - 1)] \frac{\sin n\alpha}{n} + [3(2n+1) - n(2\cos\alpha - 1)] \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1} \right\}, \\
 B_n r_0^{n-2} &= A \frac{n(n+1)}{4(2n-1)(2n+1)} \left\{ -(n-7) \frac{\sin(n-1)\alpha}{n-1} + 5(n-1) \frac{\sin(n+2)\alpha}{n+2} + \right. \\
 &\quad \left. + [3(2n+1) + (n-2)(2\cos\alpha - 1)] \frac{\sin n\alpha}{n} + [3(2n+1) - (n-2)(2\cos\alpha - 1)] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Коефіцієнти зовнішньої задачі легко знаходяться з граничних умов (2).

Виходячи з аналогії окремих задач теорії пружності і гідромеханіки стоксової рідини [2], за цими формулами виконано числові розрахунки розподілу швидкостей усередині оболонки для різних значень кута розхилу. Основна увага приділялась відшукуванню точок стагнації і так званого кільця стагнації, тобто кола, у точках якого переміщення дорівнюють заданим за умовою задачі переміщенням сферичного включення. Було виявлено певні закономірності обтікання незамкненої сферичної оболонки стоксовою рідиною. Для будь-яких кутів розхилу, крім випадку півсфери, як видно з табл. 1, радіальні швидкості всередині оболонки  $U_r^{(1)}$  досягають максимуму в точці на осі симетрії, яка завжди знаходиться ближче до центра сфери, ніж центр кільця стагнації. А центр кільця стагнації завжди лежить ближче до центра сфери, ніж центр кола обода незамкненої оболонки.

**Частинний випадок півсферичної оболонки.** Оскільки особливий інтерес у прикладних задачах становить півсферична оболонка, то випадок  $\alpha = \pi/2$  розглянемо більш детально. Сталі  $A_n$ ,  $B_n$  (5), а також  $C_n$ ,  $D_n$  зводяться до простих дробово-раціональних вира-

Таблиця 1. Особливості розподілу внутрішнього поля швидкостей при обтіканні незамкненої сферичної оболонки з кутами розхилу  $\alpha_n$ , кратними  $n(\pi/12)$

Кут розхилу оболонки	Точка стагнації на осі	Радіус кільця стагнації	Кут кільця стагнації	Центр кільця стагнації	Точки максимуму швидкості	Максимальні значення швидкості
1	0,91839	0,96825	0,17735	0,95306	0,94581	1,00178
2	0,72392	0,90008	0,38658	0,83366	0,81640	1,00793
3	0,46598	0,82032	0,63210	0,66182	0,64070	1,01604
4	0,18175	0,74957	0,91805	0,45527	0,43721	1,02356
5	-0,09911	0,70277	1,23747	0,22994	0,21995	1,02871
6	-0,35466	0,68712	$\pi/2$	0	0	1,03052
7	-0,57092	0,70092	1,89404	-0,22264	-0,21376	1,02874
8	-0,74115	0,73687	2,19168	-0,42868	-0,41432	1,02381
9	-0,86456	0,78717	2,46038	-0,61148	-0,59636	1,01672
10	-0,94462	0,84705	2,70413	-0,76728	-0,75604	1,00902
11	-0,98738	0,91607	2,92910	-0,89547	-0,89096	1,00267

зів [3]. Розподіл складових поля швидкостей знаходиться в замкненому вигляді для деяких частинних випадків, зокрема, в екваторіальній площині півсферичної оболонки  $\vartheta = \alpha = \pi/2$

$$\begin{aligned} U_r^{(1)} &\equiv 0, & U_\vartheta^{(1)} &= -\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\left(3 + \frac{1}{q^2}\right)\frac{\arcsin q}{q} + \frac{1}{4\pi}\left(3 - \frac{1}{q^2}\right)\sqrt{1 - q^2}\right]V_0, \\ U_r^{(2)} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{q^2 - 1}}{q^3}V_0, & U_\vartheta^{(2)} &= -\left\{\frac{1}{8q}\left(3 + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{q}\right\}V_0, \end{aligned} \quad (6)$$

що збігається з результатами [4], а також на осі симетрії півсфери  $\vartheta = \{0, \pi\}$

$$\begin{aligned} U_r^{(1)}\Big|_{\vartheta=\{0,\pi\}} &= \left\{\frac{1}{\pi}\left[\arctan q - \frac{q}{1+q^2}\right] \pm \frac{1}{2\pi}\left[\pi + \frac{1}{q^2} + \left(3 - \frac{1}{q^2}\right)\frac{\arctan q}{q}\right]\right\}V_0, \\ U_r^{(2)}\Big|_{\vartheta=\{0,\pi\}} &= \left\{\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{q^2} + \left(3 - \frac{1}{q^2}\right)\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{1}{q}\right)\right] \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4q}\left(3 - \frac{1}{q^2}\right) + \frac{q}{1+q^2} + \arctan\left(\frac{1}{q}\right)\right]\right\}V_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $q = r/r_0$ . За наведеними формулами легко визначається геометричне положення кільця стагнації  $q = 0,68712$ ,  $\vartheta = \pi/2$ , що лежить в екваторіальній площині півсферичної оболонки, і точка стагнації  $q = 0,35466$ ,  $\vartheta = \pi$ , яка знаходиться на осі симетрії. Радіальні швидкості вздовж осі симетрії досягають максимуму в центрі півсфери  $U_r^{(1)}(0, 0) = (1/2 + 5/3\pi)V_0 = 1,0305V_0$ , що збігається з [4].

**Функції течії.** У сферичних координатах компоненти поля швидкостей простим чином пов'язані з частинними похідними від функції течії. Враховуючи зв'язок між поліномами Лежандра та їх диференціалами, функція течії у внутрішній та зовнішній областях подається у вигляді

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(r, \vartheta) &= -\frac{1}{2\mu}\sin\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}[nA_n r^{n+3} + B_n r^{n+1}]\frac{P_n^{(1)}(\cos\vartheta)}{n(n+1)}, \\ \psi^{(2)}(r, \vartheta) &= -\frac{1}{2\mu}\sin\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)C_n r^{-n+2} - D_n r^{-n}]\frac{P_n^{(1)}(\cos\vartheta)}{n(n+1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 2 зображено розподіл ліній течії при обтіканні сферичних оболонок з кутами розхилу  $\alpha = \pi/3$ ,  $\alpha = \pi/2$ ,  $\alpha = 2\pi/3$ . У вершині сферичної оболонки лінія течії  $\psi = 0$  розгалужується на дві гілки, одна з яких збігається з віссю симетрії, а частина другої — з поверхнею оболонки. Обидві гілки замикаються на осі симетрії у точці стагнації.

Сила опору, що чинить в'язка рідина рухові сферичної оболонки, визначається так:

$$\frac{F}{8\pi\mu} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi^{(2)}}{r \sin^2 \vartheta} = \frac{C_1}{2\mu} = \frac{1}{4\pi}\left(3\alpha + 4\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)V_0 r_0, \quad (9)$$

що збігається з відомим результатом [5, 6]. Аналізуючи поле швидкостей на нескінченності, легко перекопатись у тому, що головний член асимптотики точно збігається з розв'язком задачі Кельвіна про зосереджену силу в пружному просторі, тому

$$U_r^{(2)}\Big|_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{2\cos\vartheta}{r}\frac{C_1}{2\mu}, \quad U_\vartheta^{(2)}\Big|_{r \rightarrow \infty} \simeq -\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{C_1}{2\mu}. \quad (10)$$

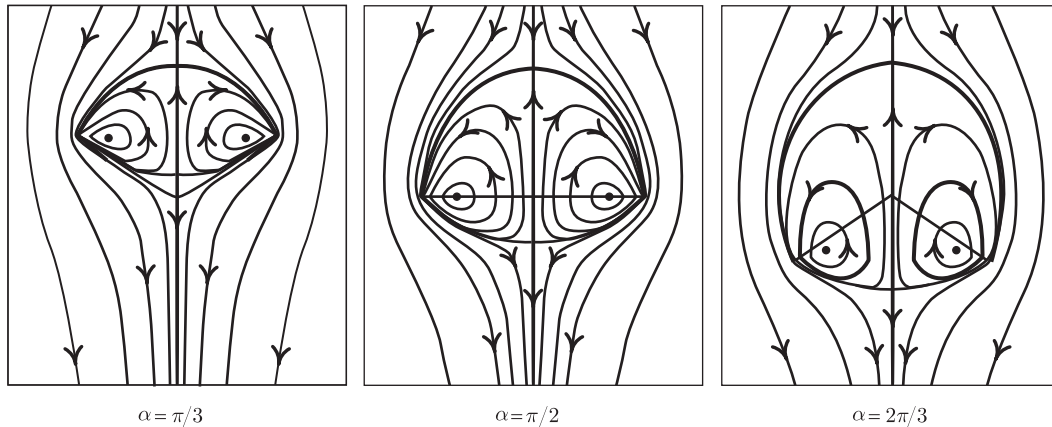


Рис. 2. Розподіл ліній течії

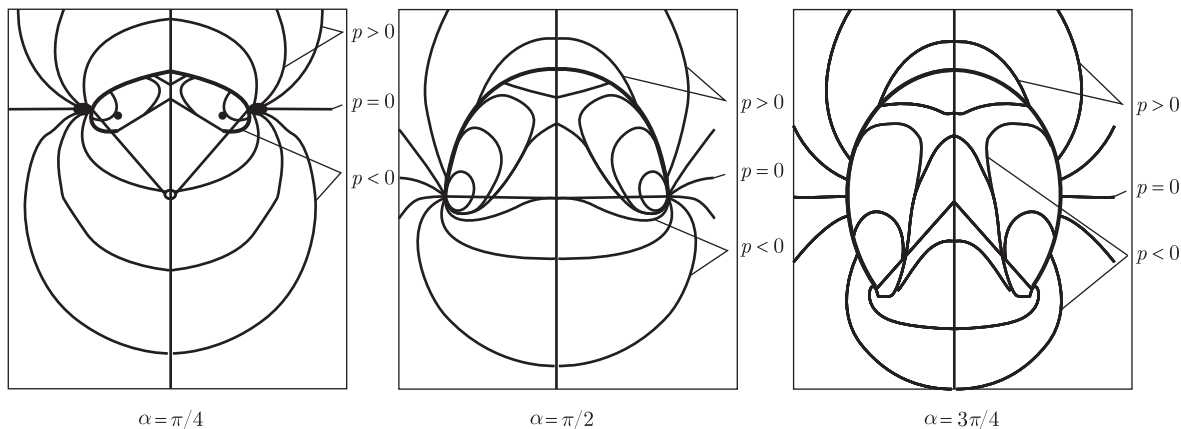


Рис. 3. Лінії рівного тиску

**Поле тиску.** Враховуючи згадувану аналогію між просторовими задачами теорії пружності та мішаними задачами для в'язкої рідини Стокса [2], тиск може бути знайдений із зіставлення рівнянь Ламе і Нав'є-Стокса і виражається

$$\frac{p(r, \vartheta)}{\mu} = -\frac{2(m-1)}{m-2} \operatorname{div} \vec{U}, \quad (11)$$

де  $m$  — число Пуассона. Для знаходження тиску спочатку обчислюємо дивергенцію від компонентів переміщень, виходячи з їх запису для загального випадку стисливої рідини ( $m \neq 2$ ). Покладаючи в остаточних виразах  $m = 2$ , знайдемо

$$p^{(1)}(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3) A_n r^n P_n(\cos \vartheta). \quad (12)$$

Аналогічно будується розв'язок для розподілу тиску  $p^{(2)}$  в зовнішній задачі.

На рис. 3 наведено лінії рівного тиску для сферичних оболонок з кутами розхилу  $\alpha = \pi/4$ ,  $\alpha = \pi/2$ ,  $\alpha = 3\pi/4$ . Попереду рухомої оболонки рідина стискається ( $p > 0$ ), а позаду та всередині незамкненої сферичної оболонки відбувається розтяг в'язкої рідини ( $p < 0$ ).

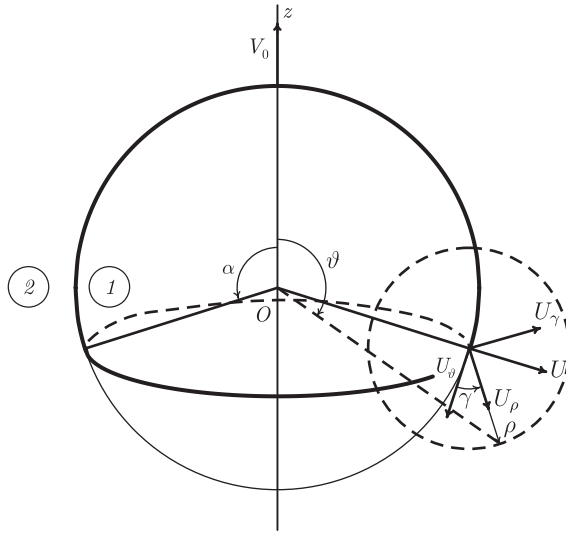


Рис. 4. Локальна система координат на границі оболонки

Зауважимо, що для довільного кута розхилу на границі оболонки  $r = r_0$ ,  $\vartheta = \alpha$  тиск  $p \rightarrow -\infty$ . Лінія  $p = 0$  відображає миттєве положення частинок рідини, на які не діють сили розтягу–стиску.

**Особливості розподілу механічних полів поблизу граничного кола тонкого жорсткого включення.** Переходячи до локальної полярної системи координат  $\rho$ ,  $\gamma$  (рис. 4), знаходимо асимптотики степеневих рядів за поліномами Лежандра [7]. В представленнях у сферичній системі координат компонентів переміщень та напружень здійснюємо інтегрування по частинах з виділенням неінтегрального доданка, який є на порядок більшим за інтегральний. Перепроєктувавши отримані в [7] вирази на осі локальної полярної системи координат  $\rho$ ,  $\gamma$  (див. рис. 4), знаходимо такі асимптотичні формули:

$$\begin{aligned}
 2\mu \frac{U_\rho}{r_0} &\simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{2 \sin \alpha}} \left[ -\varphi(\alpha) \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + \tilde{\psi}(\alpha) (1 - 3 \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} \right], \\
 2\mu \frac{U_\gamma^{(2)}}{r_0} &\simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{2 \sin \alpha}} \left[ -\varphi(\alpha) (1 + \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + \tilde{\psi}(\alpha) 3 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right], \\
 \sigma_\rho &\simeq \frac{1}{4\sqrt{2s \sin \alpha}} \left[ -\varphi(\alpha) (3 + \cos \gamma) \sin \frac{\gamma}{2} - \tilde{\psi}(\alpha) (1 + 3 \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} \right], \\
 \sigma_\gamma &\simeq \frac{1}{4\sqrt{2s \sin \alpha}} \left[ -\varphi(\alpha) (1 - \cos \gamma) \sin \frac{\gamma}{2} - \tilde{\psi}(\alpha) 3 \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} \right], \\
 \tau_{\rho\gamma} &\simeq \frac{1}{4\sqrt{2s \sin \alpha}} \left[ \varphi(\alpha) \sin \gamma \sin \frac{\gamma}{2} + \tilde{\psi}(\alpha) (1 + 3 \cos \gamma) \sin \frac{\gamma}{2} \right],
 \end{aligned} \tag{13}$$

де  $\varphi(\alpha)$ ,  $\tilde{\psi}(\alpha)$  — відомі поліноміально-тригонометричні функції. Отриманий результат точно збігається з відомим розподілом переміщень та напружень в околі границі тонкої жорсткої напівнескінченної пластини у вигляді півплощини в пружному середовищі.

Аналогічним чином можна одержати асимптотики й інших характеристик поблизу граничного кола оболонки. Так, для функції тиску у зовнішній області ( $r > r_0$ ) маємо

$$\frac{p}{\mu} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s \sin \alpha}} \frac{V_0}{r_0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}. \quad (14)$$

Отже, область стиску рідини визначається областю додатних значень тиску, що відповідає тій частині зовнішньої області, яка знаходиться попереду площини граничного кола оболонки ( $\gamma > \alpha$ ), що рухається у в'язкій рідині в осьовому напрямку. Тиск набуває від'ємних значень (розтяг в'язкої нестисливої рідини) у внутрішній області та в частині зовнішньої області, яка лежить позаду площини граничного кола оболонки ( $\gamma < \alpha$ ). Лінія  $\gamma = \alpha$  визначає миттєве положення частинок рідини, на які не діють сили розтягу–стиску.

Наведене в роботі [7] представлення для функції течії в зовнішній області ( $r > r_0$ ) дозволяє відшукати асимптотичне значення

$$\psi^{(2)} \simeq -\frac{\sin \vartheta}{2\mu} r_0^3 \frac{s^{3/2}}{\sqrt{2 \sin \alpha}} 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \left[ \varphi(\alpha) \frac{1}{3} \cos \frac{\gamma}{2} - \tilde{\psi}(\alpha) \sin \frac{\gamma}{2} \right]. \quad (15)$$

Після підстановки відомих розв'язків для  $\varphi(\alpha)$ ,  $\tilde{\psi}(\alpha)$  помічаємо, що функція течії набуває нульових значень  $\psi^{(2)} = 0$  поблизу граничного кола незамкненої сферичної оболонки тоді, коли  $\gamma = \pm\pi$ , що визначає, відповідно, зовнішній та внутрішній контури оболонки, та у випадку

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad (16)$$

що збігається з отриманим раніше результатом [1].

Таким чином, побудовано завершений аналітичний розв'язок складної мішаної задачі теорії пружності для жорсткого сферичного включення довільного кута розхилу. На основі відомої аналогії між просторовими задачами теорії пружності і задачами гідромеханіки про рух тонких оболонок у в'язкій нестисливій рідині Стокса встановлено якісно подібні вагомні особливості розподілів полів швидкостей, тиску і характеристик напруженого стану в пружному середовищі тіла з незамкненим сферичним включенням. Одержані результати можуть бути корисними при розрахунках елементів конструкцій, що включають складові з суттєво відмінними механічними характеристиками.

## Цитована література

1. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка. – 1979. – 264 с.
2. Ulitko A. F. On the Stokes flows in the vicinity of torus lens and spindle-shaped body // ZAMM., Z. Angew. Math. Mech. – Berlin. – 1997. – No 77. – P. 349–350.
3. Улитко А. Ф., Тонкошкур Г. В. Про деякі особливості обтікання тонкої жорсткої незамкненої сферичної оболонки в'язкою рідиною Стокса // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика, механіка. – 1998. – № 1. – С. 59–66.
4. Dorrepaal J. M., O'Neill M. E., Ranger K. B. Axisymmetric Stokes flow past a spherical cap // J. Fluid Mech. – 1976. – 75. – P. 273–286.
5. Collins W. D. A note on the axisymmetric Stokes flow of viscous fluid past a spherical cap // Mathematika. – 1963. – 10. – P. 72–79.
6. Payne L. E., Pell W. H. The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies // J. Fluid Mech. – 1960. – 7. – P. 529–549.

7. *Тонкошкур Г. В.* Особливості розподілу механічних полів в пружному середовищі поблизу граничного кола тонкого жорсткого включення у вигляді незамкненої сферичної оболонки // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 1999. – № 2. – С. 164–169.

## References

1. *Ulitko A. F.* Vector eigenfunctions method in the three-dimensional problems of the elasticity theory, Kyiv: Naukova Dumka, 1979 (in Russian).
2. *Ulitko A. F.* ZAMM., Z. Angew. Math. Mech., Berlin, 1997, No 77: 349–350.
3. *Ulitko A. F. Tonkoshkur H. V.* Bulletin of Kyiv University, Ser. Mathematics & Mechanics, 1998, No 1: 59–66 (in Ukrainian).
4. *Dorrepaal J. M., O'Neill M. E., Ranger K. B.* J. Fluid Mech., 1976., **75**: 273–286.
5. *Collins W. D.* Mathematika, 1963, **10**: 72–79.
6. *Payne L. E., Pell W. H.* J. Fluid Mech., 1960, **7**: 529–549.
7. *Tonkoshkur H. V.* Bulletin of Kyiv University, Ser. Physics & Mathematics Sciences, 1999, No 2: 164–169 (in Ukrainian).

Київський національний університет  
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 03.04.2015

**Г. В. Тонкошкур**

### **Особенности распределения механических полей в упругой среде с тонким жестким включением в форме незамкнутой сферической оболочки**

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

*Рассматривается метод исследования механических полей в пространственной задаче теории упругости с тонким жестким сферическим включением произвольного угла раскрытия и в аналогичной задаче гидромеханики для обтекания указанного включения стоксовой жидкостью.*

**Ключевые слова:** теория упругости, незамкнутое сферическое включение, жидкость Стокса.

**H. V. Tonkoshkur**

### **On singularities of the distribution of mechanical fields in the elastic medium with a thin rigid insertion in the form of an unclosed spherical shell**

Taras Shevchenko National University of Kiev

*The method of investigation of mechanical fields in the spatial problem of elasticity theory with a thin rigid insertion of an arbitrary apex angle and in a similar problem of hydromechanics for the Stokes flow past such an insertion is considered.*

**Keywords:** theory of elasticity, opened spherical insertion, Stokes flow.