УДК 517.946

М. Бережной, Н. К. Радякин, академик НАН Украины **Е. Я. Хруслов**

Усредненная модель малых колебаний упругой системы масс с нелокальным взаимодействием

Рассмотрена задача о малых движениях системы точечных масс с нелокальным взаимодействием. Изучено асимптотическое поведение решения этой задачи, когда расстояние между ближайшими частицами и сила взаимодействия между ними стремятся к нулю. Получена усредненная система уравнений, которой удовлетворяет главный член асимптотики. Эта система является естественной моделью нелокальной теории упругости.

Ключевые слова: малые движения системы точечных масс, усредненная система уравнений, теория упругости.

Данная работа мотивирована задачей построить нелокальную теорию упругости, описывающую поведение упругих материалов с нелокальным взаимодействием. В последние годы таким материалам уделяется особое внимание. Существует два классических подхода к построению математических моделей этих материалов — феноменологический и микроструктурный. Феноменологический подход, основанный, как правило, на интуитивном представлении, приводит к разнообразным моделям, имеющим различные области применимости [1–5]. Микроструктурный подход имеет целью обоснование модели теории упругости. Он основывается на изучении дискретной системы взаимодействующих частиц и описании ее асимптотического поведения, когда расстояние между ближайшими частицами и сила взаимодействия между ними стремятся к нулю. Асимптотическое поведение таких систем описывается уравнениями сплошной среды, зависящими от геометрии системы и характера взаимодействия. В одной из первых математически строгих работ с помощью микроструктурного подхода была получена система уравнений локальной теории упругости [6]. Метод, применимый в этой работе, можно назвать методом "мезоскопических" характеристик [7]. В данной работе с помощью этого метода изучаются колебания системы частиц с дальнодействующим взаимодействием. Мы показываем, что асимптотическое поведение таких систем описывается усредненной системой уравнений, которая является естественной моделью нелокальной теории упругости.

1. Рассмотрим систему из N взаимодействующих между собой точечных масс (частиц), расположенных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\varepsilon = O(N^{-1/3}) \ll 1$ параметр, характеризующий среднее расстояние между частицами, $\vec{u}_\varepsilon^i \equiv \equiv \vec{u}_\varepsilon^i(t)$ — малые смещения i-й частицы от ее положения равновесия; $\vec{x}_\varepsilon^i$ — радиус-вектор i-й частицы в состоянии равновесия ($i = 1, \ldots, N_\varepsilon$). Потенциальная энергия всей системы частиц в окрестности равновесия имеет вид

$$H(\vec{u}_\varepsilon^1, \ldots, \vec{u}_\varepsilon^{N_\varepsilon}) = H_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} (E_\varepsilon^{ij}(\vec{u}_\varepsilon^i - \vec{u}_\varepsilon^j), \vec{u}_\varepsilon^i - \vec{u}_\varepsilon^j), \tag{1}$$

где $H_0 = \mathrm{Const}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\{E_\varepsilon^{ij}\}_{i,j=1}^{N_\varepsilon}$ — матрица взаимодействия частиц. Для того чтобы система частиц имела единственное положение равновесия $\{\vec{x}_\varepsilon^i\}_{i=1}^{N_\varepsilon}$,

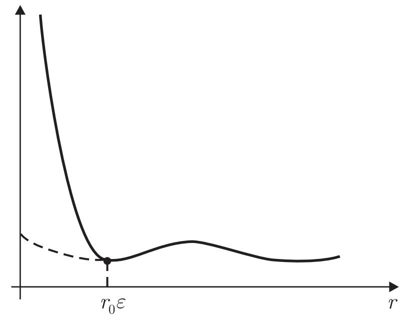

Рис. 1

будем считать, что частицы, находящиеся вблизи границы $\partial\Omega$, прикреплены к ней (т. е. их смещения равны нулю). Через $M_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2}) \ll N_\varepsilon$ обозначим количество частиц, расположенных в приграничном слое ширины порядка ε и назовем их граничными. Движение всей системы частиц описывается следующей начально-краевой задачей:

$$m_\varepsilon^i \ddot{\vec{u}}_\varepsilon^i = - \nabla_{\vec{u}_\varepsilon^i} H(\vec{u}_\varepsilon^1, \ldots, \vec{u}_\varepsilon^{N_\varepsilon}), \qquad i = 1, \ldots, N_\varepsilon, \tag{2}$$

$$\vec{u}_\varepsilon^i(0) = 0, \qquad \dot{\vec{u}}_\varepsilon^i(0) = \vec{a}_\varepsilon^i, \qquad i = 1, \ldots, N_\varepsilon, \tag{3}$$

$$\vec{u}_\varepsilon^i(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad i = 1, \ldots, M_\varepsilon, \tag{4}$$

где m_ε^i — масса i-й частицы, $\vec{a}_\varepsilon^i (i = 1, \ldots, N_\varepsilon)$ — заданные начальные скорости частиц. Можно показать, что существует единственное решение $\vec{u}_\varepsilon^i(t)$ $(i = 1, \ldots, N_\varepsilon)$ данной системы уравнений. Цель данной работы состоит в изучении асимптотического поведения решения задачи (1)–(4) при $\varepsilon \to 0$. Мы получим усредненное уравнение, описывающее главный член асимптотики, которое является макроскопической моделью движения упругой среды с нелокальным взаимодействием.

2. Основные предположения. Определим условия на массы частиц m_ε^i $(i = 1, \ldots, N_\varepsilon)$, на матрицы взаимодействия $\{E_\varepsilon^{ij}\}_{i,j=1}^{N_\varepsilon}$ и на геометрию расположения системы частиц. Будем предполагать, что масса частицы малая величина порядка ε^3, т. е. $m_\varepsilon^i = M^i \varepsilon^3$, $0 < m_1 \leqslant M^i \leqslant m_2 < \infty$, $i = 1, \ldots, N_\varepsilon$.

Будем также предполагать, что взаимодействие между частицами “центральное”, т. е. сила взаимодействия между двумя частицами направлена по оси, соединяющей эти частицы, так, что матрица E_ε^{ij} удовлетворяет условию $E_\varepsilon^{ij}(\vec{u}_\varepsilon^i - \vec{u}_\varepsilon^j) = K_\varepsilon(|\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}_\varepsilon^j|)(\vec{u}_\varepsilon^i - \vec{u}_\varepsilon^j, \vec{e}_\varepsilon^{ij})\vec{e}_\varepsilon^{ij}$, где $\vec{e}_\varepsilon^{ij} = (\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}_\varepsilon^j)/(|\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}_\varepsilon^j|)$ — единичный вектор. Скалярная функция $K_\varepsilon(r)$ характеризует взаимодействие частиц и зависит от расстояния между ними. Предположим, что

$$K_\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon^6 \Bigl(\dfrac{k}{r^5} - \dfrac{k}{(r_0\varepsilon)^5} + K(r)\Bigr), & r \leqslant r_0\varepsilon, \\ \varepsilon^6 K(r), & r \geqslant r_0\varepsilon. \end{cases} \tag{5}$$

где $k > 0$ и $r_0 \geqslant 2$ — постоянные. Вид функции $K_\varepsilon(r) \in C[0, \infty)$ приведен на рис. 1.

Замечание. Согласно (5) взаимодействие между близкими частицами пропорционально $(r)^{-5}$, что согласуется с известным ван-дер-ваальсовым взаимодействием между частицами [4].

Введем также условия на расположение частиц в пространстве (условия триангуляции). Системе взаимодействующих точек поставим в соответствие пространственный граф Γ_ε.

В вершинах его $\{\vec{x}_\varepsilon^i\}$ находятся взаимодействующие частицы, соединенные ребрами. Предполагается, что при $\forall\varepsilon > 0$ существует подграф $\Gamma'_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$ с тем же множеством вершин $\{\vec{x}_\varepsilon^i\}$ и ребрами длины $|\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}_\varepsilon^j| = d^{ij}\varepsilon$ $(0 < d^{ij}\varepsilon < 2)$, причем Γ'_ε триангулирует область Ω так, что объемы $|P_{\alpha\varepsilon}|$ симплексов триангуляции $P_{\alpha\varepsilon}$ $(\alpha = 1,\ldots,N_\varepsilon)$ удовлетворяют неравенству $|P_{\alpha\varepsilon}| > c\varepsilon^3$ $(c > 0)$. При этих условиях существует единственное (изолированное) состояние $\{\vec{x}_\varepsilon^i\}$ $(i = 1,\ldots,N_\varepsilon)$ равновесия рассматриваемой системы. Обозначим $d_\varepsilon^i = \operatorname{dist}\{x_\varepsilon^i, \bigcup_{j\neq i} x_\varepsilon^j \bigcup \partial\Omega\}$ $(i = 1,\ldots,N_\varepsilon)$ и предположим, что $c_1\varepsilon \leqslant d_\varepsilon^i \leqslant c_2\varepsilon$, $i = 1,\ldots,N_\varepsilon$. Постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε.

3. Введем локальные количественные характеристики системы частиц. Обозначим через $K_h^{\vec{x}} = K(\vec{x},h)$ куб стороны $h > 0$ $(\varepsilon \ll h \ll 1)$ с центром в точке $\vec{x}$. Для определенности будем считать что ребра куба параллельны осям координат. Рассмотрим функционал

$$E_{\varepsilon h}^\tau[\vec{v},\vec{x};T] = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\,_{K_h^{\vec{x}}} (E_\varepsilon^{ij}(\vec{v}^i - \vec{v}^j), \vec{v}^i - \vec{v}^j) + \\ + h^{-2-\tau}\varepsilon^3 \sum_i\,_{K_h^{\vec{x}}} \left| \vec{v}^i - \sum_{j,k=1}^{3} T^{jk}\vec{\varphi}^{jk}(\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}) \right|^2, \tag{6}$$

где $\sum_{i,j}\,_{K_h^{\vec{x}}}$ обозначает суммирование по всем парам частиц таких, что $|\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}_\varepsilon^j| \leqslant r_0\varepsilon$ и расположенных в кубе $K_h^{\vec{x}}$, а $\{T^{jk}\}_{j,k=1}^3$ — произвольный симметричный тензор второго ранга в $\mathbb{R}^4$, $\vec{\varphi}^{jk}(\vec{x}) = 1/2(x_j\vec{e}^k + x_k\vec{e}^j)$, $\vec{e}^k$ — орт оси x_k $(k = 1,2,3)$, $0 < \tau < 2$. Будем искать минимум этого функционала на множестве вектор-функций $\vec{v}^i = \vec{v}_\varepsilon(\vec{x}_\varepsilon^i)$, связанных с частицами $\vec{x}_\varepsilon^i \in K_h^{\vec{x}}$. Этот минимум есть однородная квадратичная функция тензора T [6]:

$$\min_{\vec{v}} E_{\varepsilon h}^\tau[\vec{v},\vec{x},T] = \sum_{npqr=1}^{3} a_{npqr}(\vec{x},\varepsilon,h,\tau)T^{np}T^{qr}, \tag{7}$$

где функции $a_{npqr}(\vec{x},\varepsilon,h,\tau)$ $(n,p,q,r = 1,2,3)$ образуют тензор 4-го ранга в $\mathbb{R}^3$.

С каждой частицей $\vec{x}_\varepsilon^i$ $(i = 1,\ldots,N_\varepsilon)$ свяжем область U_ε^i (ячейку Вороного): $U_\varepsilon^i = \bigcap_{j\neq i}\{\vec{x} \in \Omega\colon |\vec{x}_\varepsilon^i - \vec{x}| \leqslant |\vec{x}_\varepsilon^j - \vec{x}|\}$ $(i = 1,\ldots,N_\varepsilon)$.

Обозначим через $\chi_{U_\varepsilon^i}(\vec{x})$ характеристическую функцию множества U_ε^i, а $|U_\varepsilon^i|$ — объем этого множества. Введем функцию распределения масс частиц $\rho_\varepsilon(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i \chi_{U_\varepsilon^i}/U_\varepsilon^i(\vec{x})$ и функцию распределения взаимодействующих частиц $\varphi_\varepsilon(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} A_\varepsilon^{ij}\chi_{U_\varepsilon^i}(\vec{x})\chi_{U_\varepsilon^j}(\vec{y}) \times (|U_\varepsilon^i|)^{-1}(|U_\varepsilon^j|)^{-1}\varepsilon^6$, где $A_\varepsilon = \{A_\varepsilon^{ij}\}_{i,j=1}^{N_\varepsilon}$ — матрица смежности для графа Γ'_ε, т. е. числа A_ε^{ij} равны 1, если частицы $\vec{x}_\varepsilon^i$ и $\vec{x}_\varepsilon^j$ взаимодействуют, и нулю в противном случае. Введем еще функции, характеризующие отклонения частиц:

$$\vec{u}_\varepsilon(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \vec{u}_\varepsilon^i(t)\chi_{U_\varepsilon^i}(\vec{x}), \qquad \vec{u}_\varepsilon(\vec{x},0) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \vec{a}_\varepsilon^i\chi_{U_\varepsilon^i}(\vec{x}) = \vec{a}_\varepsilon(\vec{x}). \tag{8}$$

Будем предполагать, что выполняются такие условия:

1) существуют пределы функций $a_{npqr}(\vec{x},\varepsilon,h,\tau)$ (см. (7))

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0} a_{npqr}(\vec{x},\varepsilon,h,\tau)=\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0} a_{npqr}(\vec{x},\varepsilon,h,\tau)=a_{npqr}(\vec{x}); \tag{9}$$

2) последовательность функций $\widetilde{\rho}_\varepsilon(\vec{x})$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ сходится *-слабо в $L^\infty(\Omega)$ к функции $\rho(\vec{x}) > 0$;

3) последовательность функций $\varphi_\varepsilon(\vec{x},\vec{y})$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ сходится *-слабо в $L^\infty(\Omega\times\Omega)$ к функции $\varphi(\vec{x},\vec{y})$;

4) последовательность вектор-функций $\vec{a}_\varepsilon(\vec{x})$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$ сходится сильно в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $\vec{a}(\vec{x})$;

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть распределение частиц в задаче* (1)–(4) *удовлетворяет условиям триангуляции (см. п. 2) и выполняются условия 1, 2, 3 и 4. Тогда вектор-функция* $\vec{u}_\varepsilon(\vec{x},t)$ (8), *построенная по решению* $\vec{u}^{\,i}_\varepsilon(t)$ $(i=1,\ldots,N_\varepsilon)$ *дискретной задачи* (1)–(4) *сходится сильно в* $L_2(\Omega\times[0,T])$ *к решению* $\vec{u}(\vec{x},t)$ *усредненной задачи:*

$$\begin{aligned}
&\rho(\vec{x})\frac{\partial^2\vec{u}(\vec{x},t)}{\partial^2 t}-\sum_{npqr=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_q}(a_{npqr}(\vec{x})\varepsilon_{np}[\vec{u}(\vec{x},t)])\vec{e}^{\,r}-\\
&\qquad-\int\limits_\Omega K(|\vec{x}-\vec{y}|)\varphi(\vec{x},\vec{y})(\vec{u}(\vec{x},t)-\vec{u}(\vec{y},t))\,dy=0,\\
&\vec{u}(\vec{x},t)=0,\qquad \vec{x}\in\partial\Omega,\qquad t\geqslant 0,\\
&\vec{u}(\vec{x},0)=0,\qquad \left.\frac{\partial\vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t}\right|(t=0)=\vec{a}(\vec{x}),\qquad \vec{x}\in\Omega.
\end{aligned} \tag{10}$$

Цитированная литература

1. *Polizzotto P.* Nonlocal elasticity and related variational principles // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 7359–7380.
2. *Han F., Lubineau G.* Coupling of nonlocal and local continuum models by the Arlequin approach // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2012. – **89**, Iss. 6. – P. 671–685. – DOI: 10.1002/nme. 3255.
3. *Silling S. A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**. – P. 175–209.
4. *Kroner E.* Elasticity theory of materials with long range cohesive forces // Int. J. Solids Struct. – 1967. – **3**. – P. 731–742.
5. *Di Paola M., Failla G., Zingales M.*. The mechanically-based approach to 3D non-local linear elasticity theory: Long-range central interactions // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**. – P. 2347–2358.
6. *Berezhnyy M., Berlyand L.* Continuum limit for three-dimensional mass-spring networks and discrete Korn's inequality // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – **54**. – P. 635–669.
7. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Усредненные модели микронеоднородных сред. – Киев: Наук. думка, 2005. – 189 с.

References

1. *Polizzotto P.* Int. J. Solids Struct., 2001, **38**: 7359–7380.
2. *Han F., Lubineau G.* Int. J. Numer. Meth. Engng., 2012, **89**, Iss. 6: 671–685, DOI:10.1002/nme.3255.
3. *Silling S. A.* J. Mech. Phys. Solids., 2000, **48**: 175–209.

4. *Kroner E.* Int. J. Solids Struct., 1967, **3**: 731–742.
5. *Di Paola M., Failla G., Zingales M.* Int. J. Solids Struct., 2010, **47**: 2347–2358.
6. *Berezhnyy M., Berlyand L.* J. Mech. Phys. Solids., 2006, **54**: 635–669.
7. *Marchenko V. A., Khruslov E. Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations, Boston: Birkhäuser, 2006, MR 2182441.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков
Институт промышленной метематики Фраунгофера, Кайзерслаутерн, Германия

Поступило в редакцию 25.05.2015

М. Бережний, М. К. Радякін, академік НАН України **Є. Я. Хруслов**

Усереднена модель малих коливань пружної системи мас з нелокальною взаємодією

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків
Інститут промислової математики Фраунгофера, Кайзерслаутерн, Німеччина

Розглянуто задачу про малі рухи системи точкових мас з нелокальною взаємодією. Вивчено асимптотичну поведінку розв'язку цієї задачі, коли відстань між найближчими частинками та сила взаємодії між ними прямують до нуля. Побудовано усереднену систему рівнянь, що описує головний член асимптотики. Ця система є природною моделлю нелокальної теорії пружності.

Ключові слова: малі рухи системи точкових мас, усереднена система рівнянь, теорія спружності.

M. Berezhnyi, N. K. Radyakin,
Academician of the NAS of Ukraine **E. Ya. Khruslov**

A homogenized model of small oscillations of an elastic system of masses with nonlocal interaction

B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv
Fraunhofer Institute for Industrial Mathematics ITWM, Kaiserslautern, Germany

The problem of small motions of a system of mass points with nonlocal interaction is considered. We study the asymptotic behavior of the problem, when the distances between the nearest particles and the interaction force tend to zero. We obtain a homogenized system of equations, which can be considered as a natural model of the nonlocal elastic theory.

Keywords: small motions of a system of mass, a homogenized system of equations, the nonlocal elastic theory.