ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.003
УДК 517.95

О.В. Брагінець, https://orcid.org/0000-0003-2635-7203

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, Миколаїв
E-mail: oksana.brahinets@gmail.com

Групова класифікація рівнянь аксіонної електродинаміки

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Г. Нікітіним

Виконано групову класифікацію моделей аксіонної електродинаміки з самодією аксіонного поля. Для цього спочатку прокласифіковано такі функції взаємодії, що відповідають нееквівалентним групам симетрії, та знайдено ці симетрії. Також наведено деякі точні розв'язки, які цікаві з фізичної точки зору.

Ключові слова: *ліївські симетрії, допустимі перетворення, група еквівалентності, аксіонна електродинаміка, групова класифікація, рівняння Ейлера—Лагранжа*

Моделі аксіонної електродинаміки є складним і цікавим об'єктом для групового аналізу, оскільки це досить складна система, дослідження якої вимагає певного узагальнення відомих підходів. Важливість цієї моделі може бути обґрунтована такими міркуваннями. Фундаментальна теорія мікросвіту, що називається квантовою хромодинамікою, передбачає порушення симетрії відносно перетворень комбінованої інверсії *CP* за взаємодії кварків. Оскільки це порушення ніколи не було підтверджено експериментально, довелося шукати можливі корекції цієї теорії. У роботі [1] було побудовано таку корекцію, яка передбачала існування додаткового псевдоскалярного поля, що було названо полем аксіонів. Надалі аксіонна електродинаміка досліджувалася в роботах [2—5].

Зараз аксіони розглядаються як основні кандидати на роль частинок, що формують темну матерію. Додаткові аргументи на користь існування аксіонів були знайдені у фізиці твердого тіла [6].

Результати аналізу цієї моделі можуть мати важливе прикладне значення, тому що, хоча існування аксіонів поки що немає надійних експериментальних підтверджень, вони затребувані одразу в трьох абсолютно незалежних областях сучасної науки, таких як

Цитування: Брагінець О.В. Групова класифікація рівнянь аксіонної електродинаміки. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 4. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.04.003

космологія, фізика твердого тіла та квантова хромодинаміка. В наш час інтерес до аксіонної електродинаміки зберігається (див., наприклад, [7]).

У статті наведено групову класифікацію моделей аксіонної електродинаміки з самодією аксіонного поля, а також деякі точні розв'язки, цікаві з фізичної точки зору.

Узагальнений лагранжіан аксіонної електродинаміки має вигляд

$$L = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - V(\theta). \qquad (1)$$

Тут $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ — вектор-потенціал електромагнітного поля; $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$; θ — аксіонне поле; $p_\mu = \partial_\mu\theta$; $V(\theta)$ — функція від θ; κ — безрозмірна константа.

Рівняння Ейлера—Лагранжа, які відповідають лагранжіану (1), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{E} = \kappa\mathbf{p}\cdot\mathbf{B},\\ &\partial_0\mathbf{E} - \nabla\times\mathbf{B} = \kappa(p_0\mathbf{B} + \mathbf{p}\times\mathbf{E}),\\ &\nabla\cdot\mathbf{B} = 0,\\ &\partial_0\mathbf{B} + \nabla\times\mathbf{E} = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\Box\theta = -\kappa\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + F. \qquad (3)$$

Тут $\mathbf{B}$ та $\mathbf{E}$ — вектори магнітного та електричного полів, які пов'язані з компонентами тензора електромагнітного поля таким чином: $E^a = F^{0a}$; $B^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0abc}F_{bc}$; $F = -\frac{\partial V}{\partial\theta}$; $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$; $\nabla^a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = \overline{1,3}$.

Система (2), (3) містить сім залежних функцій B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3, θ і один довільний елемент F, який залежить від θ, тобто вона є досить складною.

Знайдемо симетрії рівнянь (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$ відносно неперервних груп перетворень.

Групова класифікація. Рівняння (3) містить довільну функцію $F(\theta)$, тому ми можемо передбачити, що симетрії цієї системи залежатимуть від явного вигляду F. Згідно з класичним алгоритмом Лі (див., наприклад, [8]), щоб знайти симетрії системи (2), (3) відносно неперервної групи перетворень

$$\mathbf{B}\to\mathbf{B}',\quad \mathbf{E}\to\mathbf{E}',\quad \theta\to\theta',\quad x_\mu\to x'_\mu,$$

розглянемо інфінітезимальний оператор

$$Q = \xi^\mu\partial_\mu + \eta^j\partial_{B^j} + \zeta^j\partial_{E^j} + \sigma\partial_\theta \qquad (4)$$

та його продовження

$$Q_{(2)} = Q + \eta_i^j\frac{\partial}{\partial B_i^j} + \zeta_i^j\frac{\partial}{\partial E_i^j} + \sigma_i\partial_{\theta_i} + \sigma_{ik}\partial_{\theta_{ik}}, \qquad (5)$$

де $B_i^j=\partial_i B^j$, $E_i^j=\partial_i E^j$, $\theta_i=\partial_i\theta$, $\theta_{ik}=\partial_i\theta_k$ і функції η_i^j, ζ_i^j, σ_i, σ_{ik} можуть бути виражені через ξ^i, η^j, ζ^j, σ, з використанням таких співвідношень:

$$\begin{aligned}&\eta_i^j=D_i(\eta^j)-B_k^jD_i(\xi^k),\quad \zeta_i^j=D_i(\zeta^j)-E_k^jD_i(\xi^k),\\ &\sigma_i=D_i(\sigma)-\theta_kD_i(\xi^k),\quad \sigma_{ik}=D_k(\sigma_i)-\theta_{il}D_k(\xi^l),\end{aligned}\tag{6}$$

де $D_i=\partial_i+B_i^j\partial_{B^j}+E_i^j\partial_{E^j}+\theta_i\partial_\theta+\theta_{ik}\partial_{\theta_k}$.

Використовуючи (5), умову інваріантності для системи (2), (3) можна записати у такому вигляді

$$Q_{(2)}\mathcal{F}\Big|_{\mathcal{F}=0}=0,\tag{7}$$

де $\mathcal{F}$ — многовид, заданий співвідношеннями (2), (3). Цей многовид заданий у евклідовому просторі, базис якого створюють залежні і незалежні змінні системи рівнянь (2), (3), а також похідні від залежних змінних. Обраховуючи функції (6), підставляючи результат у (7) і прирівнюючи коефіцієнти при лінійно-незалежних функціях E^j, B^j, θ та їх похідних, ми отримуємо таку визначальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів ξ^μ, η^j, ζ^j та σ:

$$\begin{aligned}&\xi^\mu_{B^a}=0,\quad \xi^\mu_{E^a}=0,\quad \xi^\mu_\theta=0,\\ &\xi^\mu_{x^\mu}=\xi^\nu_{x^\nu},\quad \xi^\mu_{x^\nu}+\xi^\nu_{x^\mu}=0,\quad \mu\neq\nu,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\sigma_{E^a}=0,\quad \sigma_{B^a}=0,\quad \sigma_{\theta\theta}=0,\tag{9}$$

$$\Box\sigma+(\sigma_\theta-2\xi^0_{x^0})(F+kE^aB^a)-\kappa(B^a\zeta^a+E^a\eta^a)-\sigma F_\theta=0,\tag{10}$$

$$\Box\xi^\mu-2\sigma_{\theta x^\mu}=0,\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\xi^a_{x^b}+\eta^b_{B^a}=0,\quad \xi^a_{x^b}+\zeta^b_{E^a}=0,\\ &\xi^a_{x^0}-\varepsilon_{abc}\eta^c_{E^b}=0,\quad \xi^a_{x^0}-\varepsilon_{abc}\eta^c_{B^b}=0,\\ &\partial_a\eta^a=0,\quad \partial_a\zeta^a+B^a\partial_a\sigma=0,\\ &\eta^a_{x^0}+\varepsilon_{abc}\zeta^c_{x^b}=0,\quad \zeta^a_{x^0}+B^a\sigma_{x^0}-\varepsilon_{abc}(\eta^c_{x^b}+E^b\sigma_{x^c})=0,\\ &\eta^a+B^a\sigma_\theta+\zeta^a_\theta-B^b\zeta^a_{E^b}+\varepsilon_{abc}E^b\xi^0_{x^c}=0,\\ &\zeta^a-\eta^a_\theta+E^a\sigma_\theta-E^b\zeta^a_{E^b}-\varepsilon_{abc}B^b\xi^c_{x^0}=0,\\ &\eta^a_{B^a}-\eta^b_{B^b}=0,\quad \eta^a_{B^a}-\zeta^b_{E^b}=0,\quad \zeta^a_{E^a}-\zeta^b_{E^b}=0,\\ &\eta^a_\theta-B^a\eta^b_{E^b}=0,\quad \zeta^a_\theta-E^a\eta^b_{E^b}=0.\end{aligned}\tag{12}$$

Тут нижні індекси позначають похідні відносно відповідних змінних: $\xi^{\mu}_{B^a} = \dfrac{\partial\mu}{\partial B^a}$ і т. д., і в останніх двох рядках не відбувається підсумовування за індексами, що повторюються.

Згідно з рівнянням (8), функції ξ^{μ} не залежать від E^a, θ і є векторами Кіллінга в просторі незалежних змінних. Їх загальний вигляд задається формулами

$$\xi^{\mu} = 2x^{\mu} f^{\nu} x_{\nu} - f^{\mu} x_{\nu} x^{\nu} + c^{\mu\nu} x_{\nu} + dx^{\mu} + e^{\mu}, \tag{13}$$

де f^{μ}, d, e^{μ} та $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$ — довільні константи.

З (9) випливає, що $\sigma = \varphi_1\theta + \varphi_2$, де φ_1 та φ_2 — функції від x_{μ}. Підставляючи цей вираз в (10), отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} &\varphi_1\theta F_{\theta} + \varphi_2 F_{\theta} + 2(\xi^0_{x^0} - \varphi_1)F + 2\kappa(\xi^0_{x^0} - \varphi_1)E_a B_a + \\ &+ \kappa(B^a\zeta^a + E^a\eta^a) - \theta\Box\varphi_1 - \Box\varphi_2 - 2p^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_1 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Нехай члени

$$\theta F_{\theta},\ F_{\theta},\ F \text{ та } 1 \tag{15}$$

є лінійно незалежними. Тоді з (14) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \xi^0_{x^0} = 0, \quad B^a\zeta^a + E^a\eta^a = 0 \tag{16}$$

і, отже, $\sigma = 0$. Підставляючи (16) та (13) в (11), отримуємо умову $f^{\nu} = 0$, тому (13) редукується до вигляду

$$\xi^{\mu} = c^{\mu\nu} x_{\nu} + e^{\mu}. \tag{17}$$

Тоді з (12), (16) та (17) випливає, що

$$\eta^a = c^{ab} B^b + \varepsilon_{abc} c^{0b} E^c, \quad \zeta^a = c^{ab} E^b - \varepsilon_{abc} c^{0b} B^c. \tag{18}$$

Підставляючи (17) та (18) в (4) і використовуючи умову $\sigma = 0$, ми отримаємо лінійну комбінацію таких інфінітезимальних операторів:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \\ &J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + B^a\partial_{B^b} - B^b\partial_{B^a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a}, \\ &J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 + \varepsilon_{abc}(E^b\partial_{B^c} - B^b\partial_{E^c}), \end{aligned} \tag{19}$$

де ε_{abc} — одиничний антисиметричний тензор, $a, b, c = 1, 2, 3$.

Оператори (19) утворюють базис алгебри Лі p(1,3) групи Пуанкаре P(1,3).

Знайдена симетрія розширяється у тих випадках, коли члени (15) є лінійно залежними. Існує три випадки, коли це відбувається. При цьому довільна функція F у рівнянні (3) набуває однієї з таких форм: $F=0$, $F=c$ та F be де c, a та b — ненульові константи. Відповідні додаткові базисні елементи алгебри інваріантності мають вигляд

$$P_4=\partial_\theta,\quad D=x_0\partial_0+x_i\partial_i-B^i\partial_{B^i}-E^i\partial_{E^i},\ \text{якщо}\ F(\theta)=0,$$

$$P_4=\partial_\theta,\ \text{якщо}\ F(\theta)=c, \tag{20}$$

$$X=aD-2P_4,\ \text{якщо}\ F=be^{a\theta}. \tag{21}$$

Оператор P_4 відповідає зсувам залежної змінної θ, D — оператор дилатації, який генерує відповідні масштабні перетворення залежних та незалежних змінних, X відповідає комбінації зсувів і масштабних перетворень. Відзначимо, що довільні параметри a, b та c можна звести до постійних значень $a=\pm1$, $b=\pm1$ і $c=\pm1$ за допомогою масштабних перетворень залежних і незалежних змінних.

Отримані результати можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема 1. *Максимальною неперервною групою інваріантності системи* (2), (3) *з довільною функцією* $F(\theta)$ *є група Пуанкаре. У випадках, вказаних у* (20) *та* (21)*, ця симетрія задається розширеними* 11*-параметричними групами Пуанкаре, тоді як для тривіального* F *група симетрії є* 12*-параметричною.*

Зазначимо, що інфінітезимальні оператори (19) можуть бути записані в термінах потенціальних змінних A^μ і $A^4=\theta$. При цьому ці оператори набувають більш компактної форми:

$$P_\mu=\partial_\mu,\quad J_{\mu\nu}=x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu+A_\mu\partial_{A_\nu}-A_\nu\partial_{A_\mu}. \tag{22}$$

Вибрані радіальні та циліндричні розв'язки. Наведемо декілька точних розв'язків рівнянь (2), (3), які можуть бути цікаві з фізичної точки зору. Спочатку розглянемо розв'язки, які містять поле точкового заряду, тобто $E_a=q\dfrac{x_a}{r^3}$, $a=1,2,3$, де $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, а q є константою. Масштабуванням залежних змінних x_a можна звести параметр q до 1. Відповідний вектор B_a є тривіальним, тобто $B_a=0$, а для існує два розв'язки:

$$\theta=\frac{c_a x_a}{r^3}$$

і

$$\theta=\frac{1}{r}(\varphi_1(x_0+r)+\varphi_2(x_0-r)),$$

де φ_1 та φ_2 — довільні функції від x_0+r та x_0-r відповідно, c_a — довільні константи і підсумовування відбувається за індексами, що повторюються: $a=1,2,3$. Ці розв'язки відповідають тривіальним нелінійним членам у (2), (3).

Радіальні розв'язки, які породжуються нетривіальними умовами в правій частині рівнянь (2), (3) з $F=-m^2\theta$ можна знайти в такому вигляді:

$$B_a=\frac{qx_a}{r^3},\quad E_a=\frac{q\theta x_a}{r^3},\quad \theta=c_1\sin(mx_0)e^{-\frac{q}{r}},$$

де c_1 та $q>0$ — довільні параметри. Компоненти магнітного поля B_a є особливими при $r=0$, тоді як E_a та θ обмежені для $\leqslant \ \leqslant\infty$.

Наведемо розв'язки, які залежать від двох просторових змінних. Позначимо через $x=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, тоді функції

$$E_1=-B_2=\frac{x_1}{x^3},\quad E_3=0,\quad B_1=E_2=\frac{x_2}{x^3},\quad B_3=b,\quad \theta=\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \tag{23}$$

де b — число.

Особливістю розв'язків (23) є те, що відповідне електричне поле зменшується зі збільшенням x як поле точкового заряду у тривимірному просторі, тоді як відповідна ефективна задача є двовимірною.

Отже, у результаті групового аналізу знайдено, що максимальною неперервною групою інваріантності системи (2), (3) з довільною функцією $F(\theta)$ є група Пуанкаре.

Використовуючи тривимірні підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре, отримано широкий клас точних розв'язків для електромагнітного та аксіонного полів [9—11]. Ці розв'язки містять довільні параметри, а деякі й довільні функції. Найбільш загальні з них містять шість таких функцій.

Автор висловлює вдячність А.Г. Нікітіну за постановку задачі та корисні дискусії.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

1. Peccei R.D., Quinn H.R. *CP* conservation in the presence of pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.* 1977. **38**, № 25. P. 1440—1443. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440
2. Raffelt G.G. Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena. *Phys. Rep.* 1990. **198**, № 1—2. P. 1—113. https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90054-6
3. Weinberg S. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.* 1978. **40**, № 4. P. 223—226. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.223
4. Wilczek F. Problem of strong *P* and *T* invariance in the presence of instantons. *Phys. Rev. Lett.* 1978. **40**, № 5. P. 279—282. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.279
5. Wilczek F. Two applications of axion electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* 1987. **58**, № 18. P. 1799—1802. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1799
6. Qi X.-L., Hughes T.L., Zhang S.-C. Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Phys. Rev. B*. 2008. **78**, № 19. Paper 195424. 43 p. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195424
7. Patkós A. Radiation backreaction in axion electrodynamics. *Symmetry*. 2022. **14**. 1113. 10 p. https://doi.org/10.3390/sym14061113
8. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. New York: Springer, 1986. 497 p.
9. Nikitin A.G., Kuriksha O. Group analysis of equations of axion electrodynamics. *Group analysis of differential equations and integrable systems:* Proceedings of the 5th International Workshop (Protaras, Cyprus, 6—10 June, 2010). Nicosia, 2011. P. 152—163.
10. Nikitin A.G., Kuriksha O. Invariant solutions for equations of axion electrodynamics. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2012. **17**. P. 4585-4601. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.04.009
11. Nikitin A.G., Kuriksha O. Symmetries of field equations of axion electrodynamics. *Phys. Rev. D*. 2012. **86**, № 2. 12 pp. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.025010

Надійшло до редакції 06.06.2022

REFERENCES

1. Peccei, R. D. & Quinn, H. R. (1977). *CP* conservation in the presence of pseudoparticles. Phys. Rev. Lett., 38, No. 25, pp. 1440-1443. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.38.1440
2. Raffelt, G. G. (1990). Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena. Phys. Rep., 198, No. 1-2, pp. 1-113. https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90054-6
3. Weinberg, S. (1978). A new light boson? Phys. Rev. Lett., 40, No. 4, pp. 223-226. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.223
4. Wilczek, F. (1978). Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons. Phys. Rev. Lett., 40, No. 5, pp. 279-282. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.40.279
5. Wilczek, F. (1987). Two applications of axion electrodynamics. Phys. Rev. Lett., 58, No. 18, pp. 1799-1802. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.1799
6. Qi, X.-L., Hughes, T. L. & Zhang, S.-C. (2008). Topological field theory of time-reversal invariant insulators. Phys. Rev. B., 78, No. 19, 195424, 43 pp. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.195424
7. Patkós, A. (2022). Radiation backreaction in axion electrodynamics. Symmetry, 14, 1113, 10 pp. https://doi.org/10.3390/sym14061113
8. Olver, P. J. (1986). Applications of Lie groups to differential equations. New York: Springer.
9. Nikitin, A. G. & Kuriksha, O. (2011, June). Group analysis of equations of axion electrodynamics. Proceedings of the 5th International Workshop Group analysis of differential equations and integrable Systems (pp. 152-163), Protaras, Cyprus.
10. Nikitin, A. G. & Kuriksha, O. (2012). Invariant solutions for equations of axion electrodynamics. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, pp. 4585-4601. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.04.009
11. Nikitin, A. G. & Kuriksha, O. (2012). Symmetries of field equations of axion electrodynamics. Phys. Rev. D., 86, No. 2. 12 pp. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.025010

Received 06.06.2022

O.V. Brahinets, https://orcid.org/0000-0003-2635-7203

Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv

E-mail: oksana.brahinets@gmail.com

GROUP CLASSIFICATION OF EQUATIONS OF AXION ELECTRODYNAMICS

We carry out the group classification of axion electrodynamics models with axiom field self-action. To do this, we first classify the interaction functions that correspond to non-equivalent symmetry groups and find these symmetries. Some exact solutions that are interesting from a physical point of view.

Keywords: *Lie symmetries, admissible transformations, equivalence group, axion electrodynamics, group classification, Euler—Lagrange equations.*