УДК 539.3

Е. Е. Курчаков

Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела

(Представлено академиком НАН Украины В. Л. Богдановым)

Получены тензорно-линейные определяющие уравнения для нелинейного анизотропного тела, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций. Выполнен анализ этих уравнений на основе первого и второго начал термодинамики. В результате связаны между собой инварианты тензора напряжений и инварианты тензора деформаций, содержащиеся в упомянутых уравнениях. В инвариантах тензора деформаций сформулированы критерии нелинейности и прочности. Приведена физическая интерпретация данных критериев.

Ключевые слова: нелинейное анизотропное тело, определяющие уравнения, первое и второе начала термодинамики.

В работе [1] выведены тензорно-линейные определяющие уравнения для нелинейного анизотропного тела, связывающие компоненты тензора деформаций с компонентами тензора напряжений. Разрешим эти уравнения относительно компонент тензора напряжений, а затем проанализируем полученные уравнения с позиций первого и второго начал термодинамики. Это позволит связать между собой инварианты тензора напряжений и инварианты тензора деформаций, содержащиеся в полученных уравнениях. Основываясь на установленных результатах, сформулируем критерии нелинейности и прочности.

Определяющие уравнения. Для постановки краевых задач в компонентах вектора перемещений необходимо привлекать определяющие уравнения, связыващие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций. Построим такие уравнения, считая деформации малыми.

Следуя работе [1], тензор деформаций обозначим $\boldsymbol{D}$, а тензор напряжений — $\boldsymbol{S}$.

Выведенные в работе [1] уравнения имеют вид

$$D_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + \frac{\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}{\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Z}}}} \left(F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} \right). \tag{1}$$

Здесь

$$\mathrm{E} = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \qquad \mathrm{Z} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \qquad \mathrm{H} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta};$$

$$\mathrm{K} = F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; \qquad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \tag{2}$$

Подчеркнем, что при выводе уравнений (1) использованы два тензора четвертого ранга, характеризующие анизотропию. Подразумеваются тензор $\boldsymbol{F}$ и тензор $\boldsymbol{G}$, обратный тензору $\boldsymbol{F}$. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иными словами, в компонентах этих тензоров можно переставлять как индексы, относящиеся к какой-либо одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Предполагалось, что для окрестности начального состояния известны зависимости каждой компоненты тензора $\boldsymbol{D}$ от каждой компоненты тензора $\boldsymbol{S}$:

$$D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}(S^{\gamma\delta}).$$

Компоненты тензора $\boldsymbol{F}$ принимались такими:

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial S^{\gamma\delta}}\bigg|_{S^{\gamma\delta}=0}.$$

Для компонент тензора $\boldsymbol{F}$ и компонент тензора $\boldsymbol{G}$, очевидно, имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta} = \delta_\gamma^\varepsilon \delta_\delta^\zeta (\varepsilon, \zeta), \tag{3}$$

где

$$\delta_\eta^\iota = \begin{cases} 1 & (\eta = \iota) \\ 0 & (\eta \neq \iota) \end{cases} \text{ — символы Кронекера.} \tag{4}$$

В соотношениях (3) предусмотрено симметрирование по индексам ε, ζ. Свертывая уравнения (1) с компонентами $G^{\alpha\beta\varepsilon\zeta}$, а также учитывая соотношения (3) и равенства (4), получим

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}} g^{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Z}}}}{\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} g^{\alpha\beta} \right). \tag{5}$$

Содержащиеся в уравнениях (5) инварианты тензора $\boldsymbol{S}$ и инварианты тензора $\boldsymbol{D}$ надлежит связать между собой.

По закону сохранения энергии, приращение плотности внутренней энергии U складывается из приращения тепла Q и приращения плотности энергии деформации W:

$$dU = dQ + dW. \tag{6}$$

Согласно первому началу термодинамики [2], для любого процесса dU является полным дифференциалом. Согласно второму началу термодинамики [3], для обратимого процесса отношение приращения тепла Q к абсолютной температуре T, т. е.

$$\frac{dQ}{T},$$

является полным дифференциалом. Как следствие этого для изотермического процесса ($T = \mathrm{const}$) dQ будет полным дифференциалом. Но тогда, согласно формуле (6), и dW будет полным дифференциалом.

Укажем, что dW равно работе компонент $S^{\alpha\beta}$ на приращениях компонент $D_{\alpha\beta}$:

$$dW = S^{\alpha\beta} dD_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Подставляя в формулу (7) уравнения (5), с учетом первого и пятого из инвариантов (2) установим

$$dW = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Z}} d\mathrm{E} + \sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Z}}}\, d\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{8}$$

Отсюда получаем такое дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{1}{\mathrm{Z}} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}} = \frac{\partial\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Z}}}}{\partial \mathrm{E}}. \tag{9}$$

Ввиду малости деформаций инвариант Е представляет собой относительное изменение объема элемента тела, а инвариант Н — относительное изменение объема элемента тела при условии, что связь компонент тензора $\boldsymbol{S}$ с компонентами тензора $\boldsymbol{D}$ линейна.

Допустим [4], что

$$\mathrm{H} = \mathrm{E}. \tag{10}$$

В силу формулы (10) общим решением уравнения (9) будет

$$\sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} = \varphi\left(\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\right). \tag{11}$$

Исследуем функцию $\varphi(\sqrt{\Xi - \mathrm{E}^2/\mathrm{Z}})$.

Пользуясь формулой (10), запишем формулу (8) в виде

$$dW = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} d\mathrm{E} + \sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\, d\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{12}$$

Интегрируя формулу (12), получим

$$W = \frac{\mathrm{E}^2}{2\mathrm{Z}} + \int \sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\, d\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{13}$$

В состоянии термодинамического равновесия величина W имеет минимум, так что $\delta^2 W$ должна быть большей нуля.

Легко видеть, что

$$\delta^2 W = \frac{(\delta\mathrm{E})^2 + \mathrm{E}\delta^2\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} + \delta\sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\,\delta\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} + \sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\,\delta^2\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{14}$$

Поскольку Е — линейный инвариант тензора $\boldsymbol{D}$, то

$$\delta^2 \mathrm{E} = 0. \tag{15}$$

Далее,

$$\delta\sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} = \frac{d\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}{d\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}\,\delta\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{16}$$

Применив равенство (15) и выражение (16), преобразуем формулу (14) к виду

$$\delta^2 W = \frac{(\delta \mathrm{E})^2}{\mathrm{Z}} + \frac{d\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}{d\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}\left(\delta\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\right)^2 + \sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}\,\delta^2\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}. \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\delta^2\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} = \frac{2\delta^2\left(\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right)\left(\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right) - \left[\delta\left(\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right)\right]^2}{4\left(\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right)\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}. \tag{18}$$

Рассмотрим числитель дроби в формуле (18).
Воспользуемся обозначениями

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}}{\mathrm{Z}} \equiv L^{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{19}$$

Учитывая первый и пятый из инвариантов (2), в свете обозначений (19) будем иметь

$$\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}} = L^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}. \tag{20}$$

Обращаясь к формуле (20), найдем

$$\delta\left(\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right) = 2L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}; \qquad \delta^2\left(\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right) = 2L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta}. \tag{21}$$

Привлекая формулы (20) и (21), получим

$$\begin{aligned} 2\delta^2\left(\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right)\left(\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right) - \left[\delta\left(\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}\right)\right]^2 = \\ = 4[(L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta})(L^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}) - (L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta})^2]. \end{aligned} \tag{22}$$

Квадратичные формы $L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta}$ и $L^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}$ суть симметрические, а кроме того, положительно определенные. Записывая их в каноническом виде и принимая во внимание неравенство Коши–Шварца, установим

$$(L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}\delta D_{\gamma\delta})(L^{\alpha\beta\gamma\delta}D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta}) - (L^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta D_{\alpha\beta}D_{\gamma\delta})^2 \geqslant 0. \tag{23}$$

Согласно формуле (22) и неравенству (23), из формулы (18) следует

$$\delta^2\sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} \geqslant 0. \tag{24}$$

Теперь уточним условие, при котором $\delta^2 W$ будет большей нуля. Отметим, что $\delta\mathrm{E}$ и $\delta\sqrt{\Xi - \mathrm{E}^2/\mathrm{Z}}$ могут быть равными нулю только поотдельности. Полагая $\delta\mathrm{E}$ равной нулю, учитывая неравенство (24) и анализируя формулу (17), придем к неравенству

$$\frac{d\sqrt{\mathrm{K} - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}}{d\sqrt{\Xi - \dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}}} > 0. \tag{25}$$

Неравенство (25) означает, что функция $\varphi(\sqrt{\Xi - \mathrm{E}^2/\mathrm{Z}})$ должна быть возрастающей.

Введем обозначения

$$\sqrt{\mathrm{K} - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} \equiv \Phi; \qquad \sqrt{\Xi - \frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{Z}}} \equiv \Omega. \tag{26}$$

Пользуясь формулами (10) и (11), а также учитывая обозначения (26), запишем уравнения (5) в виде

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} g^{\alpha\beta} + \frac{\varphi(\Omega)}{\Omega}\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} g^{\alpha\beta}\right). \tag{27}$$

Представим функцию $\varphi(\Omega)$ следующим образом:

$$\varphi(\Omega) = [1 - \widetilde{\varphi}(\Omega)]\Omega. \tag{28}$$

В соответствии с формулой (28) уравнения (27) будут иметь вид

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \widetilde{\varphi}(\Omega)\left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} g^{\alpha\beta}\right). \tag{29}$$

Конкретизируем функцию $\widetilde{\varphi}(\Omega)$. Для этого, опираясь на функциональную зависимость Ω от Φ, выявим функциональную зависимость Φ от Ω.

Пусть Φ принадлежит замкнутым промежуткам $[o, \sigma]$ и $[\sigma, \tau]$.

Разумеется, должно иметь место равенство

$$\left.\frac{d\Omega}{d\Phi}\right|_{\Phi = o} = 1. \tag{30}$$

Предположим, что функциональная зависимость Ω от Φ выражается формулой

$$\Omega = \Phi, \tag{31}$$

если $\Phi \in [o, \sigma]$, и формулой

$$\Omega = \sigma + a\left(\exp\frac{\Phi - \sigma}{a} - 1\right), \tag{32}$$

если $\Phi \in [\sigma, \tau]$.

Дифференцируя формулу (32) по Φ, получим

$$\frac{d\Omega}{d\Phi} = \exp\left(\frac{\Phi - \sigma}{a}\right). \tag{33}$$

При $\Phi = \sigma$ формула (33) вырождается в равенство

$$\left.\frac{d\Omega}{d\Phi}\right|_{\Phi=\sigma} = 1. \tag{34}$$

Равенства (30) и (34) свидетельствуют о том, что функциональная зависимость Ω от Φ является плавной.

Примем, что

$$\Omega|_{\Phi=\sigma} = \upsilon; \qquad \Omega|_{\Phi=\tau} = \psi.$$

Значит, Ω принадлежит замкнутым промежуткам $[o, \upsilon]$ и $[\upsilon, \psi]$.

Как легко убедиться,

$$\sigma = \upsilon. \tag{35}$$

Применяя формулы (31) и (32), а также формулу (35), установим, что функциональная зависимость Φ от Ω выражается формулой

$$\Phi = \Omega, \tag{36}$$

если $\Omega \in [o, \upsilon]$, и формулой

$$\Phi = \upsilon + a \ln\left(\frac{\Omega - \upsilon}{a} + 1\right), \tag{37}$$

если $\Omega \in [\upsilon, \psi]$.

Напомним, что $\Phi = \varphi(\Omega)$. Пользуясь формулами (36) и (37), на основании формулы (28) найдем

$$\widetilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \Omega \in [o, \upsilon]; \\ \dfrac{\Omega - \upsilon - a \ln\left(\dfrac{\Omega - \upsilon}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \text{если} \quad \Omega \in [\upsilon, \psi]. \end{cases}$$

Заметим, что, располагая функциональной зависимостью Φ от Ω, можно сформулировать критерии нелинейности и прочности.

Критерии нелинейности и прочности. Сформулируем критерии нелинейности и прочности, но сначала сделаем небольшое отступление.

Учитывая обозначения (26), запишем формулу (12) в виде

$$dW = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}} d\mathrm{E} + \Phi d\Omega. \tag{38}$$

Первое слагаемое в правой части формулы (38) связано с изменением объема элемента тела. Следовательно, второе слагаемое в правой части формулы (38) связано с деформацией элемента тела без изменения его объема.

Из изложенного выше следует, что переход в нелинейное состояние происходит тогда, когда Ω становится равной постоянной υ. Таким образом, имеем критерий нелинейности

$$\Omega = \upsilon. \tag{39}$$

При переходе в нелинейное состояние плотность энергии, идущей на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает некоторое значение Υ:

$$\Upsilon = \int\limits_{o}^{\upsilon} \Phi d\Omega. \tag{40}$$

Применим формулу (36). Вычисляя определенный интеграл в правой части формулы (40), получим

$$\Upsilon = \frac{\upsilon^2}{2}.$$

Будем считать, что нарушение прочности происходит тогда, когда Ω становится равной постоянной ψ. Итак, критерий прочности будет

$$\Omega = \psi. \tag{41}$$

При нарушении прочности плотность энергии, расходуемой на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает некоторое значение Ψ:

$$\Psi = \int\limits_{o}^{\psi} \Phi d\Omega. \tag{42}$$

Представим формулу (42) так:

$$\Psi = \int\limits_{o}^{\upsilon} \Phi d\Omega + \int\limits_{\upsilon}^{\psi} \Phi d\Omega. \tag{43}$$

Воспользуемся формулами (36) и (37). Вычисляя определенные интегралы в правой части формулы (43), получим

$$\Psi = \upsilon\left(\psi - \frac{\upsilon}{2}\right) + a^2\left\{\left(\frac{\psi - \upsilon}{a} + 1\right)\left[\ln\left(\frac{\psi - \upsilon}{a} + 1\right) - 1\right] + 1\right\}.$$

В заключение подчеркнем, что уравнения (29) и критерий (39) будут востребованы при постановке краевых задач в компонентах вектора перемещений, в частности, задач о предельном равновесии нелинейного анизотропного тела с трещиной. Использование при решении этих задач критерия (41) позволит определить нагрузку, приводящую к разрушению тела.

Цитированная литература

1. *Kurchakov E. E.* Stress-Strain Relation for Nonlinear Anisotropic Medium // Sov. Appl. Mech. – 1979. – **15**, No 9. – P. 803–807.
2. *Helmholtz H.* Über die Erhaltung der Kraft // Wissenschaftliche Abhandlungen. – 1847. – **1**, No 1. – S. 12–75.
3. *Clausius R.* Über eine veranderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Warmetheorie // Annalen der Physik und Chemie. – 1854. – **93**, No 12. – S. 481–506.
4. *Bridgman P.* The Physics of High Pressure. – London: G. Bell and Sons, 1931. – 404 p.

References

1. *Kurchakov E.E.* Sov. Appl. Mech., 1979, **15**, No 9: 803–807.
2. *Helmholtz H.* Wissenschaftliche Abhandlungen, 1847, **1**, No 1: 12–75.
3. *Clausius R.* Annalen der Physik und Chemie, 1854, **93**, No 12: 481–506.
4. *Bridgman P.* The Physics of High Pressure, London: G. Bell and Sons, 1931.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.03.2015

Є. Є. Курчаков

Термодинамічне обгрунтування визначальних рівнянь для нелінійного анізотропного тіла

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Отримано тензорно-лінійні визначальні рівняння для нелінійного анізотропного тіла, що зв'язують компоненти тензора напружень із компонентами тензора деформацій. Здійснено аналіз цих рівнянь на основі першої і другої основ термодинаміки. В результаті зв'язані між собою інваріанти тензора напружень та інваріанти тензора деформацій, які фігурують у згаданих рівняннях. В інваріантах тензора деформацій сформульовано критерії нелінійності й міцності. Надано фізичну інтерпретацію даних критеріїв.

Ключові слова: нелінійне анізотропне тіло, визначальні рівняння, перша і друга основи термодинаміки.

E. E. Kurchakov

Thermodynamic verification of constitutive equations for a nonlinear anisotropic body

S. P. Timoshenko Insitute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

Tensor linear constitutive equations for a nonlinear anisotropic body relating stress tensor components with strain tensor components are derived. These equations are analyzed using the first and second laws of thermodynamics. As a result, the invariants of the stress and strain tensors entering into the above equations appear related to one another. The nonlinearity and strength criteria in the strain tensor invariants are formulated. The physical interpretation of these criteria is presented.

Keywords: nonlinear anisotropic body, constitutive equations, first and second laws of thermodynamics.