Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

9 • 2015

МЕХАНІКА

УДК 539.3

А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, Ю. А. Коротких

Численное решение задачи об осесимметричных свободных колебаниях цилиндра из непрерывно-неоднородного материала на основе сплайн-аппроксимации

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

В трехмерной постановке рассматривается задача о свободных колебаниях полого цилиндра конечной длины из непрерывно-неоднородного материала. Исходная задача в частных производных с переменными коэффициентами при помощи сплайн-аппроксимации и коллокации по радиальной координате сводится к краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Полученная одномерная задача решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. Представлены результаты расчетов частот колебаний цилиндра из функционально-градиентного материала, являющегося композицией нержавеющей стали и никеля, для различных типов граничных условий на торцах при различных значениях температуры.

Ключевые слова: трехмерная теория упругости, свободные колебания, функционально-градиентный материал, полый цилиндр конечной длины, метод сплайн-коллокации.

Исследование динамического поведения цилиндров конечной длины имеет большое значение для дальнейшей логики развития фундаментальных исследований и играет важную роль для различных приложений. В настоящей работе приводится решение задачи о свободных колебаниях цилиндра конечной длины из непрерывно-неоднородного материала. Такие задачи являюся актуальными в связи с созданием и все более широким применением функционально-градиентных материалов. Механические параметры таких материалов можно регулировать, задавая необходимое их распределение в каком-либо из направлений [1–4].

В данное время существует относительно небольшое количество исследований динамического поведения упругих тел из функционально-градиентного материала (ФГМ). В работах [5, 6] решены задачи о механическом поведении пластин из ФГМ с использованием трехмерной тории упругости. В [7–10] исследуются колебания цилиндрических тел из

ФГМ с применением различных оболочечных теорий. В данной работе предлагается эффективный численно-аналитический подход к исследованию собственных частот и форм осесимметричных колебаний полых неоднородных цилиндров конечной длины из непрерывно-неоднородного материала при различных граничных условиях на торцах цилиндра. Метод базируется на применении сплайн-аппроксимации в одном из координатных направлений. Последующее решение краевой задачи на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами осуществляется устойчивым численным методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска. В работах [11–13] данный поход применялся для решения некоторых класссов задач о свободных колебаниях оболочек на основе различных моделей.

Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z радиально-продольные осесимметричные колебания полого цилиндра постоянной толщины H, длина которого L, а радиус срединной поверхности — R. Цилиндр изготовлен из ФГМ с направлением изменения упругих свойств, перпендикулярным к срединной поверхности. Исходные уравнения теории упругости для задачи имеют вид:

уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho(r)\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho(r)\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

соотношения Коши

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \qquad e_\theta = \frac{1}{r}u_r; \qquad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$
$$2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{2}$$

закон Гука

$$\sigma_r = \lambda_{11}e_r + \lambda_{12}e_\theta + \lambda_{13}e_z; \qquad \sigma_\theta = \lambda_{12}e_r + \lambda_{22}e_\theta + \lambda_{23}e_z;$$
$$\sigma_z = \lambda_{13}e_r + \lambda_{23}e_\theta + \lambda_{33}e_z; \qquad \sigma_{rz} = \lambda_{55}e_{rz}, \tag{3}$$

где элементы матрицы жесткости $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(r)$, а также плотность $\rho(r)$ — непрерывные и дифференцируемые функции координаты r. Здесь t — временная координата; $u_r(r,z,t)$, $u_z(r,z,t)$ — проекции вектора полного перемещения точек цилиндра в направлениях, касательных соответственно к координатным линиям r, z; e_r, e_θ, e_z — относительные линейные деформации в направлении координатных линий; $e_{\theta z}$, e_{rz}, $e_{r\theta}$ — деформация сдвига; σ_r, σ_θ, σ_z — нормальные напряжения; σ_{rz} — касательное напряжение. Элементы λ_{ij} матрицы жесткости могут быть вычислены через элементы матрицы податливости c_{ij}, которые в свою очередь могут быть определены через технические постоянные

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \frac{1}{E}; \qquad c_{12} = c_{13} = c_{23} = -\frac{\nu}{E}; \qquad c_{55} = \frac{1}{G},$$

где $E(r)$ — модуль упругости; $G(r)$ — модуль сдвига; $\nu(r)$ — коэффициент Пуассона непрерывно неоднородного материала.

Внутренняя и внешняя боковые поверхности оболочки $r = R \pm H/2$ свободны от напряжений, и соответствующие граничные условия принимают следующий вид:

$$\sigma_r\left(R \pm \frac{H}{2}, z, t\right) = 0, \qquad \sigma_{rz}\left(R \pm \frac{H}{2}, z, t\right) = 0. \tag{4}$$

На торцах $z = 0$ и $z = L$ рассмотрим граничные условия

$$1) \quad \sigma_r = 0, \qquad u_r = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad u_r = 0; \tag{5}$$

$$2) \quad \sigma_{rz} = 0, \qquad u_z = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial u_r}{\partial z} = 0, \qquad u_z = 0; \tag{6}$$

$$3) \quad u_r = 0, \qquad u_z = 0. \tag{7}$$

Так как все точки цилиндра совершают гармонические колебания с частотой ω, перемещения можно представить в виде (далее знак $\widehat{\ }$ опускается)

$$u_r(r, z, t) = \widehat{u}_r(r, z)\exp(i\omega t); \qquad u_z(r, z, t) = \widehat{u}_z(r, z)\exp(i\omega t). \tag{8}$$

С учетом этого запишем разрешающую систему уравнений относительно перемещений в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= a_{11}u_r + a_{12}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + a_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r} + a_{14}\frac{\partial u_z}{\partial z} + a_{15}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= a_{21}\frac{\partial u_r}{\partial z} + a_{22}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + a_{23}u_z + a_{24}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + a_{25}\frac{\partial u_z}{\partial r}, \end{aligned} \tag{9}$$

где коэффициенты

$$a_{11} = a_{11}(r, z, \omega), \qquad a_{23} = a_{23}(r, z, \omega), \qquad a_{kl} = a_{kl}(r, z)$$

$$(k, l) \in \{(k, l) \mid k = 1, 2; l = 1, \ldots, 5\} \backslash \{(1, 1), (2, 3)\}$$

определяются таким образом:

$$\begin{aligned} &a_{11} = -\frac{1}{\lambda_{11}}\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial r}\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} - \frac{1}{\lambda_{11}}\rho\omega^2; \qquad a_{12} = -\frac{\lambda_{55}}{\lambda_{11}}; \\ &a_{13} = -\left(\frac{1}{\lambda_{11}}\frac{\partial \lambda_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}\right); \qquad a_{14} = -\frac{1}{\lambda_{11}}\frac{\partial \lambda_{13}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23} - \lambda_{13}}{\lambda_{11}}\frac{1}{r}; \\ &a_{15} = -\frac{\lambda_{13} + \lambda_{55}}{\lambda_{11}}; \qquad a_{21} = -\left(\frac{1}{\lambda_{55}}\frac{\partial \lambda_{55}}{\partial r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right); \\ &a_{22} = -\left(1 + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{55}}\right); \qquad a_{23} = -\frac{1}{\lambda_{55}}\rho\omega^2; \\ &a_{24} = -\frac{\lambda_{33}}{\lambda_{55}}; \qquad a_{25} = -\left(\frac{1}{r} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{55}}\frac{1}{r}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия, выраженные через перемещения, будут иметь вид

$$\lambda_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda_{12}\frac{u_r}{r} + \lambda_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \qquad \lambda_{55}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0. \tag{11}$$

Система (9) обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями является задачей на собственные значения.

Метод решения. Задачу (9) с соответствующими граничными условиями можно решить с применением метода сплайн-коллокации [11–13]. Разрешающие функции $u_r(r,z)$, $u_z(r,z)$ представим так:

$$u_r(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_{ri}(r)\varphi_{1i}(z); \qquad u_z(r,z) = \sum_{i=0}^{N} u_{zi}(r)\varphi_{2i}(z), \tag{12}$$

где u_{ri}, u_{zi} — искомые функции переменной r; $\varphi_{ji}(z)$ $(j = 1,2; i = 1,\ldots,N)$ — линейные комбинации B-сплайнов на равномерной сетке $\Delta\colon 0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_N = L$ с учетом граничных условий при $z = 0$ и $z = L$. Поскольку в систему (9) входят производные от разрешающих функций по координате z не выше второго порядка, можно ограничиться аппроксимацией сплайн-функциями третьей степени. Подставляя представление (12) в уравнения (9), требуем их удовлетворения в заданных точках коллокации $\xi_k \in [0,L]$, $k = \overline{0,N}$. В результате получаем систему $4(N+1)$ линейных дифференциальных уравнений относительно функций $u_{ri}, \hat{u}_{ri}, u_{zi}, \hat{u}_{zi}$:

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{Y}}{dr} = A(r,\omega)\overline{Y}, \\ &B_1\overline{Y} = \overline{0} \qquad \text{при} \qquad r = R - \frac{H}{2}, \\ &B_2\overline{Y} = \overline{0} \qquad \text{при} \qquad r = R + \frac{H}{2}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\overline{Y} = \{(\overline{u}_r, \hat{\overline{u}}_r, \overline{u}_z, \hat{\overline{u}}_z\}^T$, $\overline{u}_r = \{u_{r0}, u_{r1}, \ldots, u_{rN}\}$; $\hat{\overline{u}}_r = \{\hat{u}_{r0}, \ldots, \hat{u}_{rN}\}$; $\overline{u}_z = \{u_{z0}, u_{z1}, \ldots, \ldots, u_{zN}\}$, $\hat{\overline{u}}_z = \{\hat{u}_{z0}, \ldots, \hat{u}_{zN}\}$; A — квадратная матрица порядка $4(N+1)\times 4(N+1)$; B_1, B_2 — прямоугольные матрицы граничных условий порядка $2(N+1)\times 4(N+1)$.

Задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13) с соответствующими граничными условиями решалась методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска [11–13].

Решение задачи. Анализ результатов. Исследовались свободные колебания цилиндра из ФГМ типа металл–металл, являющегося композицией нержавеющей стали и никеля (внутри цилиндра — никель, снаружи — нержавеющая сталь). Механические свойства материалов композиции в зависимости от температуры определялись по формуле [7]

$$P = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3), \tag{14}$$

где коэффициенты P_i для вычисления модулей Юнга и коэффициентов Пуассона представлены в табл. 1.

При этом для плотностей материалов коэффициенты в формуле (14) определялись следующим образом [7]: для нержавеющей стали — $P_0 = 8166$ кг/м^3, $P_i = 0$ при $i = \overline{1,4}$, для никеля — $P_0 = 8900$ кг/м^3, $P_i = 0$ при $i = \overline{1,4}$. Таким образом, плотности материалов композиции в данном исследовании не зависели от температуры.

Вычисленные механические параметры для различных температур с использованием формулы (14) представлены в табл. 2.

Для ФГМ по типу металл–металл возможно представление

$$E = (E_2 - E_1)V + E_1,$$
$$\nu = (\nu_2 - \nu_1)V + \nu_1, \qquad (15)$$
$$\rho = (\rho_2 - \rho_1)V + \rho_1,$$

где E_1, E_2 — модули Юнга; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; ρ_1, ρ_2 — плотности соответственно первого и второго металлов. При этом часто используется степенной закон изменения концентрации V второго металла вдоль направления изменения свойств

$$V = \left(\frac{r + h/2}{h}\right)^M.$$

В табл. 3, 4 приведены частоты $\varpi_i = \omega_i l_0 \sqrt{\rho_0/G_0}$ свободных колебаний цилиндров при температуре 300 К, $M = 0{,}5$ и различных граничных условиях ($S - S$ — шарнирное о пирание торцов; $C - C$ — жесткое защемление торцов цилиндра) для различных геометрических параметров: табл. 3 — $H = 2l_0$, $R = 20l_0$, $L = 5l_0$, табл. 4 — $H = 2l_0$, $R = 10l_0$, $L = 10l_0$. Для обезразмеривания выбирались такие параметры: $\rho_0 = 1$ кг/м^3, $G_0 = 1$ ГПа.

Таблица 1

P_i	Нержавеющая сталь		Никель	
	E, н/м^2	ν	E, н/м^2	ν
P_0	$201,04 \cdot 10^9$	0,3262	$223,95 \cdot 10^9$	0,31
P_{-1}	0	0	0	0
P_1	$3,079 \cdot 10^{-4}$	$-2,002 \cdot 10^{-4}$	$-2,794 \cdot 10^{-4}$	0
P_2	$-6,534 \cdot 10^{-7}$	$3,797 \cdot 10^{-7}$	$-3,998 \cdot 10^{-9}$	0
P_3	0	0	0	0

Таблица 2

T, К	Нержавеющая сталь		Никель	
	E, н/м^2	ν	E, н/м^2	ν
300	$2,07788 \cdot 10^{11}$	0,317756	$2,05098 \cdot 10^{11}$	0,31
350	$2,06614 \cdot 10^{11}$	0,318511	$2,01940 \cdot 10^{11}$	0,31
400	$2,04783 \cdot 10^{11}$	0,319895	$1,98778 \cdot 10^{11}$	0,31
450	$2,02295 \cdot 10^{11}$	0,324512	$1,95611 \cdot 10^{11}$	0,31
500	$1,99150 \cdot 10^{11}$	0,324512	$1,92440 \cdot 10^{11}$	0,31

Таблица 3

ϖ_i	S–S без использования сплайнов	S–S с использованием сплайнов	C–C с использованием сплайнов
ϖ_1	0,03077	0,03000	0,04676
ϖ_2	0,08654	0,08587	0,09352
ϖ_3	0,10044	0,10059	0,10307
ϖ_4	0,14660	0,14601	0,14992
ϖ_5	0,14982	0,14985	0,18253

Таблица 4

ϖ_i	S–S без использования сплайнов	S–S с использованием сплайнов	C–C с использованием сплайнов
ϖ_1	0,01728	0,01688	0,02263
ϖ_2	0,03313	0,03244	0,03982
ϖ_3	0,05152	0,05117	0,05170
ϖ_4	0,05857	0,05792	0,06423
ϖ_5	0,08727	0,08668	0,09099

Представленная методика может быть применена для расчетов частот свободных колебаний непрерывно-неоднородных цилиндров с различными законами изменения механических свойств вдоль толщинной координаты.

Цитированная литература

1. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rew. – 2009. – **60**. – P. 195–215.
2. *Koizumi M.* The concept of FGM ceramic transactions // Funct. Gradient Mater. – 1993. – **34**. – P. 3–10.
3. *Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G.* Functionally Graded Materials, Design, Processing and Applications. – Boston: Kluwer, 1999. – P. 1–6.
4. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. – London: Maney, 1998. – 165 p.
5. *Kashtalyan M.* Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates // Eur. J. of Mechanics A/Solids. – 2004. – **23**, No 5. – P. 853–864.
6. *Woodward B., Kashtalyan M.* Three-dimensional elasticity solution for bending of transversely isotropic functionally graded plates // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2011. – **30**, No 5. – P. 705–718.
7. *Loy C. T., Lam K. Y., Reddy S. N.* Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int. J. of Mech. Sci. – 1999. – **41**. – P. 309–324.
8. *Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy S. N.* Vibrations characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // Apll. Acoustics. – 2000. – **61**. – P. 111–129.
9. *Shah A. G., Mahmood T., Naeem M. N.* Vibrations of FGM thin cylindrical shells with exponential volume fraction law // Appl. Math. and Mech. – 2009. – **30**, No 5. – P. 607–615.
10. *Sofiyev A. H., Avear H.* The stability of cylindrical shells containing an FGM layer subjected to axial load on the Pasternak foundation // Eng. – 2010. – **2**, No 4. – P. 228–236.
11. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Application of the spline-approximation method for solving the problems on axisymmetric natural vibrations of thick-wall orthotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No 10. – P. 1137–1147.
12. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Spline-based investigation of natural vibrations of orthotropic rectangular plates of variable thickness within classical and refined theories // J. of Mech. and Struct. – 2008. – **3**, No 5. – P. 929–952.
13. *Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Y., Vlaikov G. G.* Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models. – Kiev: Akademperiodika, 2009. – 548 p.

References

1. *Birman V., Byrd L. W.* Appl. Mech. Rew, 2009, **60**: 195–215.
2. *Koizumi M.* Funct. Gradient Mater, 1993, **34**: 3–10.
3. *Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B. H., Kawasaki A., Ford R. G.* Functionally Graded Materials, Design, Processing and Applications, Boston: Kluwer, 1999: 1–6.
4. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials, London: Maney, 1998: 165.
5. *Kashtalyan M.* Eur. J. of Mechanics A, Solids, 2004, **23**, No 5: 853–864.
6. *Woodward B., Kashtalyan M.* Eur. J. Mech. A, Solids, 2011, **30**, No 5: 705–718.

7. *Loy C. T., Lam K. Y., Reddy S. N.* Int. J. of Mech. Sci, 1999, **41**: 309–324.
8. *Pradhan S. C., Loy C. T., Lam K. Y., Reddy S. N.* Apll. Acoustics, 2000, **61**: 111–129.
9. *Shah A. G., Mahmood T., Naeem M. N.* Appl. Math. and Mech, 2009, **30**, No 5: 607–615.
10. *Sofiyev A. H., Avear H.* Eng., 2010, **2**, No 4: 228–236.
11. *Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* Int. Appl. Mech., 2008, **44**, No 10: 1137–1147.
12. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Efimova T. L.* J. of Mech. and Struct, 2008, **3**, No 5: 929–952.
13. *Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Y., Vlaikov G. G.* Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models, Kiev: Akademperiodika, 2009.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 17.03.2015

О. Я. Григоренко, Т. Л. Єфімова, Ю. А. Коротких

Чисельне розв'язування задачі про осесиметричні вільні коливання циліндра з неперервно-неоднорідного матеріалу на основі сплайн-апроксимації

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

У тривимірній постановці розглядається задача про вільні коливання порожнистого циліндра скінченної довжини з неперервно-неоднорідного матеріалу. Вихідна задача теорії пружності в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами за допомогою сплайн-апроксимації і колокації за радіальною координатою зводиться до крайової задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку. Відповідна одновимірна задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку. Наведено результати розрахунків частот коливань циліндра з функціонально-градієнтного матеріалу, який є композицією нержавіючої сталі та нікелю, для різних типів граничних умов на торцях при різних значеннях температури.

Ключові слова: тривимірна теорія пружності, вільні коливання, функціонально-градієнтний матеріал, порожнистий циліндр скінченної довжини, метод сплайн-колокації.

A. Ya. Grigorenko, T. L. Efimova, Yu. A. Korotkih

Numerical solution of the problem of axisymmetric free vibrations of a cylinder from continuously inhomogeneous material with in the spline-approximation method

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

On the base of 3-D theory of elasticity, a problem of natural vibrations of a hollow cylinder of finite length made of a continuously inhomogeneous material is considered. The original partial equations of the theory of elasticity, using the spline-approximation and collocation, are reduced to the problem for the systems of ordinary differential equations of high order.The problems is solved by the steady-state numerical method of discrete orthogonalization with incremental search. The calculation results for the frequencies of vibrations are presented in the case of cylinders made of FGM, which are compositions of stainless steel and nickel, for some types of boundary conditions at the ends for different values of temperature.

Key words: 3-D theory of elasticity, natural vibrations, continuously inhomogeneous material, hollow cylinder of finite length, the method of spline-collocation.