

Проблеми керованості для хвильового рівняння на півплощині та модифіковані простори Соболева

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Двовимірне хвильове рівняння $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0, T)$, на півплощині $x_1 > 0$, кероване крайовою умовою Діріхле $w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, досліджене в просторах Соболева, де $T > 0$ — деяка стала, а $u \in L^\infty(0, T)$ — керування. Цю керовану систему трансформовано в деяку керовану систему для одновимірного хвильового рівняння в модифікованих просторах Соболева. Ці простори відіграють важливу роль у дослідженні. Для одновимірної задачі керування одержано необхідні і достатні умови (наближеної) L^∞ -керованості. Також доведено, що двовимірна керована система відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи і навпаки. Нарешті, необхідні і достатні умови (наближеної) L^∞ -керованості одержано для вихідної двовимірної задачі керування.

Ключові слова: модифіковані простори Соболева, хвильове рівняння, проблема керованості, півплощина, керування крайовими умовами Діріхле.

Останнім часом питання керованості для хвильового рівняння вивчалися багатьма дослідниками (див. [1–13] та ін).

Розглянемо хвильове рівняння

$$w_{tt} = \Delta w, \quad x_1 > 0, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

кероване крайовою умовою Діріхле

$$w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t), \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

де $T > 0$ є сталою, $u \in L^\infty(0, T)$ — керування, δ — розподіл Дірака, $\Delta = (\partial/\partial x_1)^2 + (\partial/\partial x_2)^2$. Досліджується керованість системи (1), (2) за заданий та вільний час у просторах Соболева (див. означення нижче). Керованість цієї системи лише за заданий час вивчалася раніше в [3]. Рівняння (1), кероване крайовою умовою Неймана: $w_{x_1}(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, було досліджене у [8].

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — простір Шварца швидко зростаючих функцій n змінних та $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — його двоїтий простір помірно зростаючих розподілів (див., наприклад, [14, гл. 1]). Позначимо $H_l^s(\mathbb{R}^n)$, $s, l \in \mathbb{R}$, такі простори Соболева:

$$H_l^s(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |D|^2)^{s/2}(1 + |x|^2)^{l/2}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |D|^2)^{s/2}(1 + |x|^2)^{l/2}\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

де $|\cdot|$ — евклідова норма в $\mathbb{R}^n$, $D = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Добре відомо [14, гл. 1], що $H_l^s \subset H_{l'}^{s'}$ є неперервним вкладенням, $s' \leq s$, $l' \leq l$. Позначимо $\mathcal{S}_+ = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mid \text{supp } \varphi \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathcal{S}'_+$ — двоїтий простір для $\mathcal{S}_+$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Нехай $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ є оператором перетворення Фур'є. Для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ маємо $(\mathcal{F}\varphi)(\sigma) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \sigma \rangle} \varphi(x) dx$, для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — $\langle \mathcal{F}f, \psi \rangle = \langle f, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle$.

Добре відомо [14, гл. 1], що $\mathcal{F}$ є ізотричним ізоморфізмом $H_0^s(\mathbb{R}^n)$ та $H_s^0(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $n = 2$. Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо через $\tilde{H}_l^s(\mathbb{R}^2)$ підпростір непарних відносно x_1 розподілів у $H_l^s(\mathbb{R}^2)$ та позначимо $\tilde{\mathbf{H}}^s = \tilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \times \tilde{H}_0^{s-1}(\mathbb{R}^2)$.

Нехай $s = \overline{0, 3}$. Позначимо також $\mathcal{H}_0^s = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \mid \exists \tilde{\varphi} \in \tilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2) \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \text{ м. с. на } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}\}$ з нормою $\|\varphi\|_0^s = \|\tilde{\varphi}\|_0^s / \sqrt{2}$, $\varphi \in \mathcal{H}_0^s$, $\tilde{\varphi} \in \tilde{H}_0^s(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$ м. с. на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, та $\mathcal{H}_0^{-s} = (\mathcal{H}_0^s)'$ з нормою $\|f\|_0^{-s} = \sup\{|\langle f, \varphi \rangle| / \|\varphi\|_0^s \mid \|\varphi\|_0^s \neq 0\}$, $f \in \mathcal{H}_0^{-s}$.

Ми розглядаємо рівність (2), як значення розподілу w на $x_1 = 0$ (див. означення у [8]).

Розглянемо керовану систему (1), (2) за початкових умов

$$w(x, 0) = w_0^0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1^0, \quad x_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

у просторах $\mathcal{H}_0^{-s}$, $s = 1, 2, 3$. Тут $w_0^0 \in \mathcal{H}_0^0$, $w_1^0 \in \mathcal{H}_0^{-1}$, $\left(\frac{d}{dt}\right)^s w: [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_0^{-s-1}$, $s = 1, 2, 3$, $\Delta: \mathcal{H}_0^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_0^{-3}$. Позначимо через $W(\cdot, t) = \begin{pmatrix} W_0(\cdot, t) \\ W_1(\cdot, t) \end{pmatrix}$ та $W^0 = \begin{pmatrix} W_0^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix}$ непарне продовження відносно x_1 для $\begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix}$ відповідно, $t \in [0, T]$. Тоді $\left(\frac{d}{dt}\right)^s W: [0, T] \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{-s-1}$, $s = 1, 2$, $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$. Отже, w є розв'язком задачі (1)–(3) тоді і лише тоді, коли W є розв'язком задачі

$$\frac{d}{dt}W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} W - 2\delta'(x_1)\delta(x_2)u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

$$W(\cdot, 0) = W^0, \quad (5)$$

де $\delta \in H_0^{-2}(\mathbb{R}^2)$ — розподіл Дірака. Далі ми вивчаємо керовану систему (4), (5) замість (1)–(3).

Простори та оператори. Нехай $n = 1$. Для $s, l \in \mathbb{R}$ позначимо $H_l^s = H_l^s(\mathbb{R})$, $\tilde{H}_l^s = \tilde{H}_l^s(\mathbb{R})$. Далі до кінця цього пункту вважатимемо, що $s \in \mathbb{R}$.

Розглянемо простір $H_{s[-1/2]}^0 = \{\varphi \in H_{s-1/2}^0 \mid \exists \tilde{\varphi} \in H_s^0 \varphi = \sqrt{|\rho|}\tilde{\varphi}\}$ з нормою $|\varphi|_{s[-1/2]}^0 = \|\varphi / \sqrt{|\rho|}\|_s^0$, $\varphi \in H_{s[-1/2]}^0$, та його двоїтий простір $H_{-s[1/2]}^0 = (H_{s[-1/2]}^0)'$ із сильною топологією, тобто $|f|_{-s[1/2]}^0 = \sup\{|\langle f, \varphi \rangle| / |\varphi|_{s[-1/2]}^0 \mid |\varphi|_{s[-1/2]}^0 \neq 0\}$, $f \in H_{-s[1/2]}^0$. Очевидно, $|f|_{-s[1/2]}^0 = \|\sqrt{|\rho|}f\|_{-s}^0$, $f \in H_{-s[1/2]}^0$. Ці простори було введено та досліджено у [8]. Зокрема, доведено, що простори $H_{s[-1/2]}^0$ та $H_{-s[1/2]}^0$ є повними і $H_{s[-1/2]}^0 \subset H_{s-1/2}^0$ та $H_{-s+1/2}^0 \subset H_{-s[1/2]}^0$ є неперервними вкладеннями. Також там було доведено, що якщо $f \in H_{-s[1/2]}^0$, то $f \in H_{-s+1/2}^{-3/2}$.

Розглянемо простори $H_0^{s[-1/2]} = \mathcal{F}H_{s[-1/2]}^0$ та $H_0^{-s[1/2]} = \mathcal{F}H_{-s[1/2]}^0$ з нормами $|\varphi|_0^{s[-1/2]} = |\mathcal{F}\varphi|_{s[-1/2]}^0$, $\varphi \in H_0^{s[-1/2]}$, та $|f|_0^{-s[1/2]} = |\mathcal{F}f|_{-s[1/2]}^0$, $f \in H_0^{-s[1/2]}$. Очевидно, $H_0^{-s[1/2]} = (H_0^{s[-1/2]})'$. З властивостей просторів $H_{s[-1/2]}^0$ та $H_{-s[1/2]}^0$ випливає, що $H_0^{s[-1/2]}$ та $H_0^{-s[1/2]}$ є повними, $H_0^{s[-1/2]} \subset H_0^{s-1/2}$ та $H_0^{-s+1/2} \subset H_0^{-s[1/2]}$ є неперервними вкладеннями і якщо

$f \in H_0^{-s[1/2]}$, то $f \in H_{-3/2}^{-s+1/2}$. Позначимо через $\tilde{H}_0^{-s[1/2]}$ підпростір непарних розподілів $H_0^{-s[1/2]}$.

Введемо підпростори

$$\mathbb{H}^s = \left\{ G \in H_0^s(\mathbb{R}^2) \mid \exists g \in \mathcal{S}'_+ G(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} g(|x|) \right\},$$

$$\mathbb{H}_s = \{ F \in H_s^0(\mathbb{R}^2) \mid \exists f \in \mathcal{S}'_+ F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|) \}$$

просторів $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ та $H_s^0(\mathbb{R}^2)$ відповідно. Очевидно, $\mathbb{H}_s = \mathcal{F}\mathbb{H}^s$. Якщо $f \in \mathbb{H}_s$, то існує функція f така, що $F(\sigma) = i\sigma_1 f(|\sigma|)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, та

$$\|F\|_s^0 = \sqrt{\pi} \|\rho\|^{3/2} f\|_s^0. \quad (6)$$

Отже, простір $\mathbb{H}_s$ є повним. Оскільки перетворення Фур'є $\mathcal{F}$ є ізометричним ізоморфізмом $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ і $H_s^0(\mathbb{R}^2)$ [14, гл. 1], то воно є ізометричним ізоморфізмом $\mathbb{H}^s$ і $\mathbb{H}_s$. Отже, простір $\mathbb{H}^s$ є також повним. Позначимо $\tilde{\mathbb{H}}^s = \mathbb{H}^s \times \mathbb{H}^{s-1}$. Бачимо, що цей простір є підпростором $\tilde{\mathbf{H}}^s$.

Позначимо $\Psi: \tilde{H}_0^{-3[1/2]} \rightarrow \mathbb{H}^{-3}$, $D(\Psi) = \tilde{H}_0^{-3[1/2]}$,

$$\Psi f = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\sigma_1}{|\sigma|} (\mathcal{F}f)(|\sigma|) \right), \quad f \in D(\Psi).$$

Для оператора Ψ справедливі такі теореми.

Теорема 1. Оператор Ψ є ізоморфізмом $\tilde{H}_0^{s[1/2]}$ та $\mathbb{H}_0^s$. Крім того, $\|\Psi f\|_0^s = \sqrt{\pi} |f|_0^{-s[1/2]}$, $f \in D(\Psi)$, $s \geq -3$.

Теорема 2. Маємо $\Delta \Psi f = \Psi(f'')$, $f \in \tilde{H}_0^{s[1/2]}$, $s \geq -3$.

Теорема 3. Нехай $\alpha > 0$. Якщо $f \in \tilde{H}_0^{0[1/2]}$ та $G = \Psi f$, то $\text{supp } f \subset [-\alpha, \alpha]$ у тому і лише тому випадку, коли $\text{supp } G \subset D_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \alpha\}$.

Перетворення між двовимірною та одновимірною керованими системами. Розглянемо керовану систему (4), (5) та допоміжну керовану систему

$$\frac{d}{dt} Z(\cdot, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (d/d\xi)^2 & 0 \end{pmatrix} Z(\cdot, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta'(\xi) u(t), \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$Z(\cdot, 0) = Z^0, \quad (8)$$

з тими самими $T > 0$ та $u \in L^\infty(0, T)$. Тут $\delta \in H_0^{-2[1/2]}$ є розподілом Дірака, $\left(\frac{d}{dt}\right)^s Z: [0, T] \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{-(s+1)[1/2]}$, $s = 0, 1$, $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$.

Для заданих $T > 0$ та $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ ($Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) позначимо через $\mathcal{R}_T^2(W^0)$ ($\mathcal{R}_T^1(Z^0)$), відповідно) множину кінцевих станів $W^T \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ ($Z^T \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно), для яких існує керування $u \in L^\infty(0, T)$ таке, що (4), (5) ((7), (8), відповідно) має єдиний розв'язок W (Z , відповідно) і $W(\cdot, T) = W^T$ ($Z(\cdot, T) = Z^T$, відповідно). Позначимо також $\mathcal{R}_\infty^j(Z^0) = \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_T^j(Z^0)$, $j = 1, 2$.

Означення 1. Стан $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ ($Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) називається L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) ((7), (8), відповідно) за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить $\mathcal{R}_T^2(W^0)$ ($\mathcal{R}_T^1(Z^0)$, відповідно), та наближено L^∞ -керованим відносно цієї системи за заданий час $T > 0$, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}_T^2(Z^0)$ в $\tilde{\mathbf{H}}^0$ (замиканню $\mathcal{R}_T^1(Z^0)$ в $\tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно).

Означення 2. Стан $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ ($Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$) називається наближено L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) ((7), (8), відповідно) за вільний час, якщо 0 належить замиканню $\mathcal{R}_\infty^2(Z^0)$ в $\tilde{\mathbf{H}}^0$ (замиканню $\mathcal{R}_\infty^1(Z^0)$ в $\tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, відповідно).

Аналогічно теоремі 4.1 у [8] доводимо нижченаведену теорему і одержуємо висновок.

Теорема 4. Нехай керування $u_n(t)$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1, \infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞ -керованості відносно системи (4), (5) для стану $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$. Нехай W^n є розв'язком (4), (5) з $u = u_n$, $T = T_n$, $n = \overline{1, \infty}$. Тоді цей розв'язок є єдиним, $W^n(\cdot, t) \in \tilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T_n]$, $n = \overline{1, \infty}$, та $W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^0$.

Висновок 1. Нехай $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$ та $W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^0$. Нехай W є розв'язком (4), (5). Тоді $W(\cdot, t) \in \tilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T]$.

Враховуючи теорему 4 та висновок 1, ми можемо розглядати проблеми керованості відносно системи (4), (5) в просторах $\tilde{\mathbb{H}}^{-s}$ замість просторів $\tilde{\mathbf{H}}^{-s}$, $s = 1, 2$. Аналогічно теоремам 4.3 та 4.4 у [8] доводимо такі дві теореми.

Теорема 5. Нехай $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$, $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$, $W^0 = \Psi Z^0$. Нехай Z є розв'язком (7), (8) та $W(\cdot, T) = \Psi Z(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. Тоді W є розв'язком (4), (5), $W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^0$ та $W(\cdot, t) \in \tilde{\mathbb{H}}^{-1}$, $t \in [0, T]$.

Теорема 6. Нехай $T > 0$, $u \in L^\infty(0, T)$, $W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^0$, $Z^0 = \Psi^{-1}W^0$. Нехай W є розв'язком (4), (5) та $Z(\cdot, T) = \Psi^{-1}W(\cdot, t)$, $t \in [0, T]$. Тоді Z є розв'язком (7), (8), $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ та $Z(\cdot, t) \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1[1/2]}$, $t \in [0, T]$.

З теорем 1, 6 і теорем 4.3, 4.4 у [8] одержуємо

Висновок 2. Нехай $W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^0$ та $Z^0 = \Psi^{-1}W^0$. Тоді $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ і виконано такі твердження.

1. Стан W^0 є L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли Z^0 є L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за той самий час.

2. Стан W^0 є наближено L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли Z^0 є наближено L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за той самий час.

3. Стан W^0 є наближено L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за вільний час тоді і лише тоді, коли Z^0 є наближено L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за вільний час.

Таким чином, двовимірна керована система (4), (5) відтворює властивості керованості одновимірної керованої системи (7), (8) і навпаки.

Допоміжна керована система. Керовану систему (7), (8) в класичних просторах Соболева H_0^s було вивчено в [11]. Оскільки топологія просторів $H_0^{s[1/2]}$ досить суттєво відрізняється від топології H_0^s , нам доводиться наново вивчати цю систему в модифікованих просторах Соболева $H_0^{s[1/2]}$. З тієї ж причини керування будується іншим способом.

Нижченаведені три твердження одержуємо аналогічно теоремам 5.3, 5.5 та висновку 5.4 у [8].

Теорема 7. Стан $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ є L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли

$$Z_1^0 = (\operatorname{sgn} \xi Z_0^0)', \quad (9)$$

$$\operatorname{supp} Z_0^0 \subset [-T, T], \quad (10)$$

$$Z_0^0 \in L^\infty(\mathbb{R}). \quad (11)$$

Крім того, за умов (9)–(11) керування $u(t) = Z_0^0(t)$, $t \in [0, T]$, розв'язує проблему L^∞ -керованості відносно системи (7), (8) для Z^0 за час $T > 0$.

Теорема 8. Стан $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ є наближено L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли виконано умови (9), (10). Крім того, за цих умов керування $u_n(t) = Z_0^0(tn/(n-1)) * n\varphi(tn)$, $t \in [0, T]$, $n = \overline{2, \infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞ -керованості відносно системи (7), (8) за час $T > 0$ для стану Z^0 , де $\varphi(\xi) = 0$ для $|\xi| \geq 1$, $\varphi(\xi) = 4(1 - |\xi|)/3$ для $1/2 \leq |\xi| < 1$ та $\varphi(\xi) = 2/3$ для $|\xi| < 1/2$.

Теорема 9. Стан $Z^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{0[1/2]}$ є наближено L^∞ -керованим відносно системи (7), (8) за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умову (9).

Головна керована система. У цьому пункті ми досліджуємо керовану систему (4), (5), застосовуючи результати попередніх двох пунктів. З теорем 3, 4, 7, 9 та висновків 1, 2, 8 випливають такі три теореми.

Теорема 10. Стан $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ є L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли

$$W^0 \in \tilde{\mathbb{H}}^1, \quad (12)$$

$$W_1^0 = \Psi(\operatorname{sgn} x(\Psi^{-1}W_0^0)'), \quad (13)$$

$$\operatorname{supp} W_0^0 \in \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq T\}, \quad (14)$$

$$\Psi^{-1}W_0^0 \subset L^\infty(\mathbb{R}). \quad (15)$$

Крім того, за умов (12)–(15) керування $u(t) = (\Psi^{-1}W_0^0)(t)$, $t \in [0, T]$, розв'язує проблему L^∞ -керованості відносно системи (4), (5) для Z^0 за час $T > 0$.

Теорема 11. Стан $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ є наближено L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за заданий час $T > 0$ тоді і лише тоді, коли виконано умови (12)–(14). Крім того, за цих умов керування $u_n(t) = (\Psi^{-1}W_0^0)(tn/(n-1)) * n\varphi(tn)$, $t \in [0, T]$, $n = \overline{2, \infty}$, розв'язують проблему наближеної L^∞ -керованості відносно системи (4), (5) за час $T > 0$ для стану W^0 , де $\varphi(\xi) = 0$ для $|\xi| \geq 1$, $\varphi(\xi) = 4(1 - |\xi|)/3$ для $1/2 \leq |\xi| < 1$ та $\varphi(\xi) = 2/3$ для $|\xi| < 1/2$.

Теорема 12. Стан $W^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^0$ є наближено L^∞ -керованим відносно системи (4), (5) за вільний час тоді і лише тоді, коли виконано умови (12) та (13).

Цитована література

1. Беллишев М. И., Вакуленко А. Ф. Об одной задаче управления для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – **332**. – С. 19–37.
2. Castro C. Exact controllability of the 1-D wave equation from a moving interior point // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. – 2013. – **19**. – P. 301–316.
3. Fardigola L. V. On controllability problems for the wave equation on a half-plane // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2005. – **1**. – P. 93–115.
4. Fardigola L. V. Controllability problems for the 1-d wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control // ESAIM: Control, Optim. Calc. Var. – 2012. – **18**. – P. 748–773.
5. Fardigola L. V. Transformation operators of the Sturm-Liouville problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis // SIAM J. Control Optim. – 2013. – **51**. – P. 1781–1801.
6. Fardigola L. V. Controllability problems for the 1-d wave equations on a half-axis with Neumann boundary control // Math. Control and Related Fields. – 2013. – **3**. – P. 161–183.
7. Fardigola L. V. Transformation operators in controllability problems for the wave equations with variable coefficients on a half-axis controlled by the Dirichlet boundary condition // Math. Control and Related Fields. – 2015. – **5**. – P. 31–53.
8. Fardigola L. V. Modified Sobolev spaces in controllability problems for the wave equation on a half-plane // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2015. – **11**. – P. 18–44.

9. Gugat M., Sokolowski J. A note on the approximation of Dirichlet boundary control problems for the wave equation on curved domains // Appl. Anal. – 2012. – **92**. – P. 2200–2214.
10. Lui Y. Some sufficient conditions for the controllability of the wave equation with variable coefficients // Acta Appl. Math. – 2013. – **128**. – P. 181–191.
11. Sklyar G. M., Fardigola L. V. The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **276**. – P. 109–134.
12. Privat Y., Trélat E., Zuazua E. Optimal location of controllers for the one-dimensional wave equation // Ann. Inst. Poincaré (C). Non Linéair Analysis. – 2013. – **30**. – P. 1097–1126.
13. Seck Ch., Bayili G., Sène A., Niane M. T. Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des espaces de Sobolev non réguliers pour un ouvert polygonal // Afr. Mat. – 2012. – **23**. – P. 1–9.
14. Gindikin S. G., Volevich L. R. Distributions and Convolution Equations. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1992. – 465 p.

References

1. Belishev M. I., Vakulenko A. F. J. Math. Sci, 2007, **142**, Iss. 6: 2528–2539.
2. Castro C. ESAIM: Control, Optim. Calc. Var, 2013, **19**: 301–316.
3. Fardigola L. V. J. Math. Phys., Anal., Geom, 2005, **1**: 93–115.
4. Fardigola L. V. ESAIM: Control, Optim. Calc. Var, 2012, **18**: 748–773.
5. Fardigola L. V. SIAM J. Control Optim, 2013, **51**: 1781–1801.
6. Fardigola L. V. Math. Control and Related Fields, 2013, **3**: 161–183.
7. Fardigola L. V. Math. Control and Related Fields, 2015, **5**: 31–53.
8. Fardigola L. V. J. Math. Phys., Anal., Geom, 2015, **11**: 18–44.
9. Gugat M., Sokolowski J. Appl. Anal., 2012, **92**: 2200–2214.
10. Lui Y. Acta Appl. Math, 2013, **128**: 181–191.
11. Sklyar G. M., Fardigola L. V. J. Math. Anal. Appl, 2002, **276**: 109–134.
12. Privat Y., Trélat E., Zuazua E. Ann. Inst. Poincaré (C). Non Linéair Analysis, 2013, **30**: 1097–1126.
13. Seck Ch., Bayili G., Sène A., Niane M. T. Afr. Mat., 2012, **23**: 1–9.
14. Gindikin S. G., Volevich L. R. Distributions and Convolution Equations, Philadelphia: Gordon and Breach, 1992.

Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 31.03.2015

Л. В. Фардигола

Проблемы управляемости для волнового уравнения на полуплоскости и модифицированные пространства Соболева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Харьков

Двумерное волновое уравнение $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0, T)$, на полуплоскости $x_1 > 0$, управляемое краевым условием Дирихле $w(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$, исследовано в пространствах Соболева, где $T > 0$ — некоторая постоянная, а $u \in L^\infty(0, T)$ — управление. Эта управляемая система трансформирована в некоторую управляемую систему для одномерного волнового уравнения в модифицированных пространствах Соболева. Эти пространства играют важную роль в исследовании. Для одномерной задачи управления получены необходимые и достаточные условия (приближенной) L^∞ -управляемости. Также доказано, что двумерная управляемая

система воспроизводит свойства управляемости одномерной управляемой системы и наоборот. Наконец, необходимые и достаточные условия (приближенной) L^∞ -управляемости получены для исходной двумерной задачи управления.

Ключевые слова: модифицированные пространства Соболева, волновое уравнение, проблема управляемости, полуплоскость, управление краевыми условиями Дирихле.

L. V. Fardigola

Controllability problems for the wave equation on a half-plane and modified Sobolev spaces

B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the NAS of Ukraine, Kharkiv

The 2-d wave equation $w_{tt} = \Delta w$, $t \in (0, T)$, on the half-plane $x_1 > 0$ controlled by the Dirichlet boundary condition $w_{x_1}(0, x_2, t) = \delta(x_2)u(t)$ is considered in Sobolev spaces, where $T > 0$ is a constant and $u \in L^\infty(0, T)$ is a control. This control system is transformed to a control system for the 1-d wave equation in modified Sobolev spaces. These spaces play an important role in the study. Necessary and sufficient conditions of (approximate) L^∞ -controllability are obtained for the 1-d control problem. It is also proved that the 2-d control system replicates the controllability properties of the 1-d control system and vice versa. Finally, necessary and sufficient conditions of (approximate) L^∞ -controllability are obtained for the original 2-d control problem.

Keywords: modified Sobolev spaces, wave equation, controllability problem, half-plane, Dirichlet boundary control.