УДК 539.375

В. М. Назаренко, А. Л. Кипнис

Об интенсивности напряжений в концах межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред

(Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем)

Рассмотрена симметричная задача теории упругости о межфазных сдвиговых трещинах в угловой точке границы раздела сред. Для решения задачи применен метод Винера–Хопфа. Получена формула для коэффициента интенсивности напряжений.

Ключевые слова: механика разрушения композитных материалов, негладкая граница раздела, межфазная трещина, метод Винера–Хопфа.

Как свидетельствуют литературные источники, при рассмотрении задач механики разрушения композитных материалов о межфазных трещинах в кусочно-однородных телах предполагается, что граница раздела сред является гладкой [1, 2]. В то же время, в первую очередь вблизи угловых точек негладкой границы раздела сред, представляющих собой остроконечные концентраторы напряжений, следует ожидать зарождение исходящих из них межфазных трещин.

Ниже дается решение симметричной задачи об определении коэффициента интенсивности напряжений в каждом из концов межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред.

В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, которое составлено из изотропных упругих частей с модулями E_1, E_2 $(E_1 > E_2)$ и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2. Из угловой точки границы раздела сред исходят межфазные сдвиговые трещины, длина которых в значительной степени меньше размеров тела. Предполагается, что трение между берегами трещин отсутствует.

С учетом малости трещин приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рис. 1). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача K), порождаемое единственным на интервале $]-1;0[$ корнем ее характеристического уравнения. Произволь-

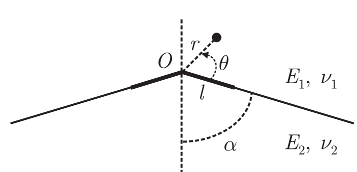

Рис. 1

ная постоянная C, входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Граничные условия рассматриваемой задачи (см. рис. 1) имеют следующий вид:

$$\theta=\pi-\alpha,\qquad \tau_{r\theta}=0,\qquad u_\theta=0;\qquad \theta=-\alpha,\qquad \tau_{r\theta}=0,\qquad u_\theta=0; \tag{1}$$

$$\theta=0,\qquad \langle\sigma_\theta\rangle=\langle\tau_{r\theta}\rangle=0,\qquad \langle u_\theta\rangle=0;$$

$$\theta=0,\qquad r<l,\qquad \tau_{r\theta}=0;\qquad \theta=0,\qquad r>l,\qquad \langle u_r\rangle=0; \tag{2}$$

$$\theta=0,\qquad r\to\infty,\qquad \tau_{r\theta}=Cgr^{\lambda}+o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{3}$$

Здесь $-\alpha\leqslant\theta\leqslant\pi-\alpha$; $\langle a\rangle$ — скачок a; $g(\alpha,e_0,\nu_1,\nu_2)$ ($e_0=E_1/E_2$) — известная функция; λ — единственный на интервале $]-1;0[$ корень уравнения

$$\Delta(-x-1)=0,\qquad \Delta(z)=\delta_0(z)+\delta_1(z)e+\delta_2(z)e^2,$$

$$\delta_0(z)=(\sin 2z\alpha+z\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2z(\pi-\alpha)+z\sin 2\alpha],$$

$$\delta_1(z)=(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 z\pi-(\sin 2z\alpha+z\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2z(\pi-\alpha)+z\sin 2\alpha]-$$

$$-[\sin 2z(\pi-\alpha)-z\sin 2\alpha](æ_2\sin 2z\alpha-z\sin 2\alpha),$$

$$\delta_2(z)=[\sin 2z(\pi-\alpha)-z\sin 2\alpha](æ_2\sin 2z\alpha-z\sin 2\alpha),$$

$$e=\frac{1+v_2}{1+v_1}e_0,\qquad æ_{1,2}=3-4v_{1,2}.$$

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta=0,\qquad r<l,\qquad \tau_{r\theta}=-Cgr^{\lambda}, \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Среди методов решения задач механики разрушения, применяемых в настоящее время [2–6], одним из эффективных является метод Винера–Хопфа. Для построения точного решения первой задачи будем использовать метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [7, 8].

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая втрое условие (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа:

$$\Phi^+(p)+\frac{\tau}{p+\lambda+1}=A\operatorname{ctg}p\pi G(p)\Phi^-(p),$$

$$A=\frac{(1+æ_1)[1+æ_1+(1+æ_2)e]}{2[æ_1+(1+æ_1æ_2)e+æ_2e^2]},\qquad G(p)=\frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

$$G_1(p)=[æ_1+(1+æ_1æ_2)e+æ_2e^2][a_0(p)+a_1(p)e]\sin p\pi,$$

$$
\begin{aligned}
&G_2(p)=[1+æ_1+(1+æ_2)e][b_0(p)+b_1(p)e+b_2(p)e^2]\cos p\pi,\\
&a_0(p)=(1+æ_1)[\cos 2p(\pi-\alpha)-\cos 2\alpha](\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha),\\
&a_1(p)=(1+æ_2)(\cos 2p\alpha-\cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha],\\
&b_0(p)=(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha],\\
&b_1(p)=(1+æ_1)(1+æ_2)\sin^2 p\pi-(\sin 2p\alpha+p\sin 2\alpha)[æ_1\sin 2p(\pi-\alpha)+p\sin 2\alpha]-\\
&\qquad-[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha),\\
&b_2(p)=[\sin 2p(\pi-\alpha)-p\sin 2\alpha](æ_2\sin 2p\alpha-p\sin 2\alpha),\qquad \tau=-Cgl^{\lambda},\\
&\Phi^+(p)=\int\limits_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l,0)\rho^p d\rho,\qquad \Phi^-(p)=\frac{E_1}{4(1-v_1^2)}\int\limits_0^1\left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}}\rho^p d\rho.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь $-\varepsilon_1<\operatorname{Re}p<\varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа.

Функция $G(it)$ $(-\infty<t<\infty)$ представляет собой действительную положительную четную функцию t, стремящуюся к единице при $t\to\infty$. Следовательно, индекс функции $G(p)$ по мнимой оси равен нулю. Поскольку, кроме того, функция $G(p)$ на мнимой оси удовлетворяет условию Гельдера, имеет место факторизация [9]

$$
G(p)=\frac{G^+(p)}{G^-(p)}\qquad(\operatorname{Re}p=0),\qquad \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^+(p) & (\operatorname{Re}p<0),\\ G^-(p) & (\operatorname{Re}p>0).\end{cases}
\tag{6}
$$

Функцию $p\operatorname{ctg}p\pi$ можно факторизовать так [10]:

$$
p\operatorname{ctg}p\pi=K^+(p)K^-(p),\qquad K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}
\tag{7}
$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

С помощью факторизаций (6), (7) уравнение (5) перепишем в виде

$$
\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau}{(p+\lambda+1)K^+(p)G^+(p)}=\frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)}\qquad(\operatorname{Re}p=0).
\tag{8}
$$

Справедливо представление

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau}{(p+\lambda+1)K^+(p)G^+(p)}&=\frac{\tau}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]+\\
&+\frac{\tau}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\qquad(\operatorname{Re}p=0).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)}+\frac{\tau}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)}-\frac{1}{K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\right]=\\
&\qquad=\frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)}-\frac{\tau}{(p+\lambda+1)K^+(-\lambda-1)G^+(-\lambda-1)}\qquad(\operatorname{Re}p=0).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Функция в левой части (10) аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p < 0$, а функция в правой части (10) аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > 0$. В силу принципа аналитического продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p.

Вблизи конца трещины в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел [11] реализуется асимптотика, представляющая собой решение однородной статической задачи теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную линию разрыва касательного смещения, порождаемое корнем $-1/2$ ее характеристического уравнения. В частности, имеют место асимптотики

$$\begin{aligned} &\theta = 0, \qquad r \to l + 0, \qquad \tau_{r\theta} \sim \frac{æ_1 + e + 1 + æ_2 e}{2(1 + æ_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r - l)}}, \\ &\theta = 0, \qquad r \to l - 0, \qquad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1} \frac{æ_1 + e}{1 + æ_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l - r)}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений в конце трещины, подлежащий определению.

Исходя из (11), по теореме абелева типа получаем

$$p \to \infty, \qquad \Phi^+(p) \sim \frac{æ_1 + e + 1 + æ_2 e}{2(1 + æ_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{-2pl}}; \qquad \Phi^-(p) \sim -\frac{æ_1 + e}{1 + æ_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2pl}}. \tag{12}$$

Из (6), (7), (12) следует, что функции в левой и правой частях (10) стремятся к нулю при $p \to \infty$ в полуплоскостях $\mathrm{Re}\, p < 0$ и $\mathrm{Re}\, p > 0$ соответственно. В силу теоремы Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей плоскости p.

Таким образом, решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} &\Phi^+(p) = \frac{\tau K^+(p) G^+(p)}{p + \lambda + 1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)} - \frac{1}{K^+(p) G^+(p)} \right] \qquad (\mathrm{Re}\, p < 0), \\ &\Phi^-(p) = \frac{\tau p G^-(p)}{A K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1)(p + \lambda + 1) K^-(p)} \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0). \end{aligned} \tag{13}$$

С помощью (13) находим асимптотику

$$p \to \infty, \qquad \Phi^-(p) \sim \frac{\tau}{A K^+(-\lambda - 1) G^+(-\lambda - 1) \sqrt{p}}. \tag{14}$$

Согласно (12), (14), получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце межфазной сдвиговой трещины:

$$K_{II} = \frac{2\sqrt{2}(1 + æ_2 e) g \Gamma(\lambda + 3/2)}{[1 + æ_1 + (1 + æ_2) e] \Gamma(\lambda + 2) G^+(-\lambda - 1)} C l^{\lambda + 1/2}.$$

Таким образом, в работе рассмотрена плоская статическая симметричная задача теории упругости о равновесии кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, в вершине которого зародились две межфазные трещины. С использованием аппарата интегрального преобразования Меллина задача сведена к функциональному уравнению Винера–Хопфа. На основании точного аналитического решения функционального уравнения получено выражение для коэффициента интенсивности напряжений в конце трещин, зависящее от длины трещины, коэффициентов Пуассона и отношения модулей Юнга материалов.

Цитированная литература

1. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
2. *Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, No 1. – P. 1–61.
3. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.* Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
4. *Guz A. N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 1. – P. 1–57.
5. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chernoivan Yu. A.* Initial Fracture of a Viscoelastic Isotropic Plate with Two Collinear Cracks of Equal Length // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 3. – P. 310–320.
6. *Богданов В. Л., Гузь А. Н., Назаренко В. М.* Осесимметричная задача о разрушении тела с периодической системой соосных трещин под действием направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 3–18.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
11. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.

References

1. *Savruk M. P.* Stress intensity factors in the bodies with cracks, Kiev: Nauk. Dumka, 1988 (in Russian).
2. *Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A.* Int. Appl. Mech., 2013, **49**, No 1: 1–61.
3. *Panasyuk V. V., Andrejkiv A. E., Parton V. Z.* Fracture mechanics basis, Kiev, 1988 (in Russian).
4. *Guz A. N.* Int. Appl. Mech, 2014, **50**, No 1: 1–57.
5. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chernoivan Yu. A.* Int. Appl. Mech, 2014, **50**, No 3: 310–320.
6. *Bogdanov V. L., Guz A. N., Nazarenko V. M.*, Appl. Mech, 2009, **45**, No 2: 3–18 (in Russian).
7. *Nobl B.* Using of the Wiener–Hopf method for solving the partial derivative equation, Moscow: Izdatelstvo Inostr. lit., 1962 (in Russian).
8. *Uflyand Ya. S.* Integral transformations in the theory of elasticity problems, Leningrad: Nauka, 1967 (in Russian).
9. *Gahov F. D.* Boundary-value problems, Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
10. *Lavrent'ev M. A., Shabat B. V.* Complex variable functions theory methods, Moscow: Nauka, 1973 (in Russian).
11. *Parton V. Z., Perlin P. I.* Mathematical theory of elasticity methods, Moscow, 1981 (in Russian).

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 24.02.2015

В. М. Назаренко, О. Л. Кіпніс

Про інтенсивність напружень в кінцях міжфазних зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу середовищ

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Розглянуто симетричну задачу теорії пружності про міжфазні зсувні тріщини в кутовій точці межі поділу середовищ. Для розв'язання задачі застосовано метод Вінера–Хопфа. Одержано формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень.

Ключові слова: механіка руйнування композитних матеріалів, негладка межа поділу, міжфазна тріщина, метод Вінера–Хопфа.

V. M. Nazarenko, A. L. Kipnis

On the stress intensity near the tips of interfacial boundary shear cracks at a corner point of the interface

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

The symmetric problem of the theory of elasticity for interfacial shear cracks at a corner point of the media-separating boundary is considered. To solve the problem, the Wiener–Hopf method is used. The formula for the stress intensity factor is obtained.

Keywords: composites fracture mechanics, non-smooth interface, interface crack, Wiener–Hopf method.