

## О распространении осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре при электрическом способе возбуждения

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

*Проведен кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в неоднородном по толщине полом цилиндре, состоящем из металлических и пьезокерамических слоев, поляризованных в радиальном направлении при электрическом способе возбуждения волн. Боковые поверхности цилиндра свободны от внешних воздействий и к ним приложена гармонически изменяющаяся разность электрического потенциала  $\pm V_0 e^{i(kz - \omega t)}$ . Для решения задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После применения метода разделения переменных и представления решения в виде бегущих волн по длине цилиндра начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученная система решается устойчивым методом дискретной ортогонализации. Приведены результаты численных исследований для слоистого цилиндра, состоящего из слоев пьезокерамики PZT и стали.*

**Ключевые слова:** кинематический анализ акустоэлектрических волн, слоистые пьезокерамические цилиндры, дискретная ортогонализация.

В данной работе рассматривается осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями. Исследованию задачи о распространении упругих волн в круговых цилиндрах посвящено значительное количество работ. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в [1–4]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований. Так, для пьезокерамического цилиндра только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Наличие поверхности раздела двух сред приводит к необходимости удовлетворять условиям сопряжения разрешающих функций на границе раздела сред. Исследования, посвященные этой проблематике, можно найти в работах [5, 6].

В отличие от чисто упругой задачи, существует возможность электрического способа возбуждения распространяющихся волн. В данной работе для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями предложен эффективный численно-аналитический подход. На основании предложенного подхода проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Осесимметричные продольные уравнения движения  $i$ -го слоя в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2};\end{aligned}\quad (1)$$

уравнения электростатики для  $i$ -го слоя

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} &= 0; \\ E_r^i &= -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z};\end{aligned}\quad (2)$$

геометрические соотношения для  $i$ -го слоя

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_{ij}^i$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho^i$  — плотность материала;  $\omega$  — круговая частота;  $u_i^i$  — компоненты вектора перемещений;  $D_i^i$  — компоненты вектора электрической индукции;  $E_i^i$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\phi^i$  — электростатический потенциал;  $\varepsilon_{ij}^i$  — компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для  $i$ -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{51}^i E_z^i; \\ D_r^i &= e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{31}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{31}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \\ D_z^i &= 2e_{51}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i,\end{aligned}\quad (4)$$

где  $c_{ij}^i$  — компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ij}^i$  — компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{ij}^i$  — компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Физические соотношения для  $i$ -го металлического слоя имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1 - \nu^i) E^i}{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{rz}^i &= 2 \frac{E^i}{2(1 + \nu^i)} \varepsilon_{rz}^i.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга. В дальнейшем индекс  $i$  будем опускать.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) задаются следующие: боковые поверхности свободны от внешних воздействий  $\sigma_{rr}|_{r=R_0+h} = \sigma_{rz}|_{r=R_0+h} = 0$  и к ним приложена гармонически изменяющаяся разность электрического потенциала  $\varphi|_{r=R_0+h} = V_0 e^{i(kz-\omega t)}$  ( $R_0$  — радиус серединной поверхности цилиндра;  $h$  — половина толщины цилиндра).

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r\}^T. \quad (6)$$

Разрешая систему (1)–(4) относительно разрешающего вектора, после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{r c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_7}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta &= c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2; & \Delta_1 &= c_{33} e_{13} - c_{13} e_{33}; & \Delta_2 &= c_{13} \varepsilon_{33} + e_{13} e_{33}; \\ \Delta_3 &= (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{11}) \Delta; \\ \Delta_4 &= (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{12}) \Delta; \\ \Delta_5 &= c_{12} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; & \Delta_6 &= c_{11} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; & \Delta_7 &= c_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2. \end{aligned}$$

**Решение задачи.** Решение задачи будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz-\omega t)}; & \sigma_{rz}(r, z, t) &= i \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz-\omega t)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz-\omega t)}; & u_r(r, z, t) &= h u_r(r) e^{i(kz-\omega t)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz-\omega t)}; & D_r(r, z, t) &= \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz-\omega t)}. \end{aligned} \quad (8)$$

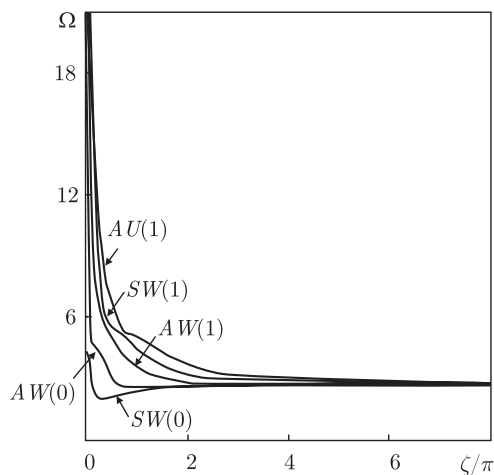


Рис. 1

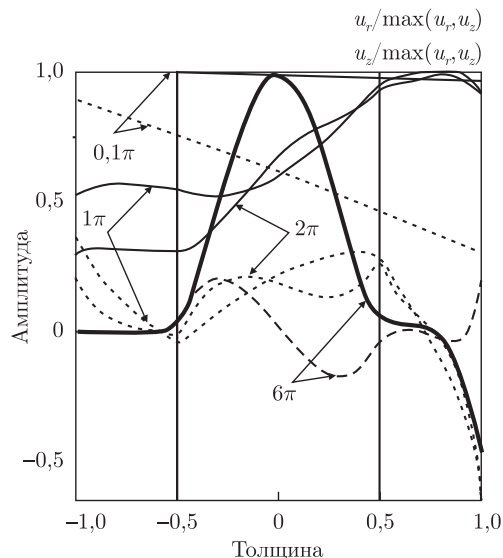


Рис. 2

Используя представление (8), исходную двухмерную задачу теории электроупругости в частных производных (7) можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{B}_1\mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2. \quad (10)$$

где вектор  $\mathbf{C}_1^T = \{0, 0, -1, 0, 0\}$ , вектор  $\mathbf{C}_2^T = \{0, 0, -1, 0, 0\}$ . Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h},$$

$\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho_0 = 1$  кг/м<sup>3</sup>.

Решение задачи (9), (10) выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

**Результаты численного анализа.** Ниже приведены результаты численного анализа задачи (9), (10). Рассматривается трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются стальными ( $\nu = 0,28$ ;  $E = 21$ ), а средний слой — пьезокерамическим (из пьезокерамики PZT 4), параметр кривизны принят  $\varepsilon = 0,25$ . Толщина внешних слоев равна  $h$ , толщина среднего слоя —  $2h$ .

На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. На рисунке используются обозначения для волн, принятые в работе [10]. Маркировка SW (0) означает, что волна рождается ( $k = 0$ ) как симметричные продольные колебания (волны расширения–сжатия), AU (0) — антисимметричные (изгибные) радиальные колебания.

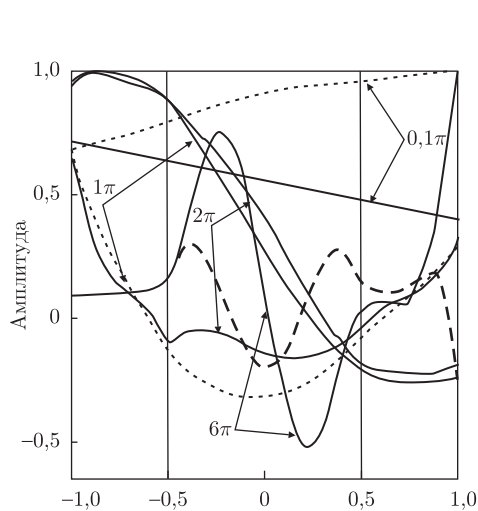


Рис. 3

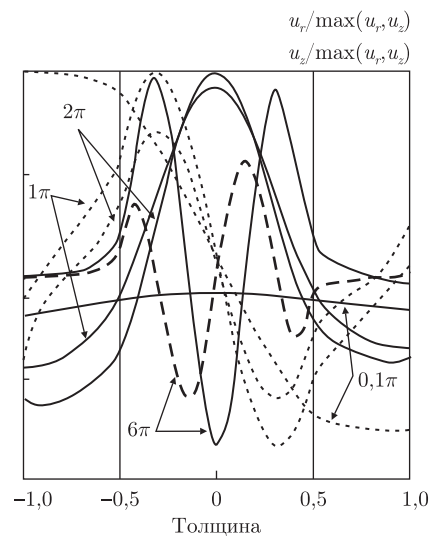


Рис. 4

Рис. 2 демонстрирует распределение амплитуд перемещений по толщине в первой волне SW (0) для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений  $u_r$ , штриховой — продольных  $u_z$ . Жирными линиями выделено распределение амплитуд перемещений в коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону. С уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются в более мягком пьезокерамическом слое. При дальнейшем уменьшении длины волны распределение перемещений начинает принимать характер волны типа Рэлея, бегущей вдоль внешней боковой поверхности.

На рис. 3 показано распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне AU(0). Также можно отметить, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине носит почти линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения локализуются во внутреннем, более мягком слое. С дальнейшим уменьшением длины волны начинают выходить на движения, характерные для волн типа Рэлея, распространяющихся так же вдоль внешней поверхности цилиндра.

Рис. 4 демонстрирует распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне AW(1). В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются в более мягком пьезокерамическом слое, в то время как стальные слои являются практически не деформированными.

**Анализ результатов.** Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая ветвь в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая же ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, также распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Для последующих же более высоких ветвей наблюдается так же, как и в случае однородного материала, увеличение числа полувольт в более мягком пьезокерамическом слое. Более жесткие стальные слои с уменьшением длины волны становятся практически не деформируемыми.

## Цитированная литература

1. *Физическая акустика* / Под ред. У. Мэзона. Р. Терстона. – Москва: Мир, 1966. – Т. 1–7. – 663 с.
2. *Thurston R. N.* Elastic waves in rods and clad rods // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1978. – **64**, No 1. – P. 1–37.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
4. *Кольский Г.* Волны напряжений в твердых телах. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
5. *Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
6. *Шульга Н. А.* Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами // *Усп. механики в 6-ти томах*, 2007. – С. 681–702.
7. *Birman V., Byrd L. W.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *ASME Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **195**. – P. 195–216.
8. *Chih-Ping Wu, Tsu-Chieh Tsai.* Exact solutions of functionally graded piezoelectric material sandwich cylinders by a modified Pagano method // *Appl. Math. Modelling.* – 2012. – **36**, Iss. 5. – P. 1910. – 1930.
9. *Grigorenko A., Muller W. H., Wille R., Loza I.* Nonaxisymmetric vibrations of radially polarized hollow cylinders made of functionally gradient piezoelectric materials // *Continuum Mech. Thermodyn.* – 2012. – **24**(4–6). – P. 515–524.
10. *Григоренко А. Я., Лоза И. А.* Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими слоями, поляризованными в осевом направлении // *Прикл. механика.* – 2011. – **47**, № 6. – С. 118–124.

## References

1. *Physical acoustics*, ed. by W. Mason, R. Thurston, Moscow: Mir, 1966, **1–7** (in Russian).
2. *Thurston R. N.* *J. Acoust. Soc. Am.*, 1978, **64**, No 1: 1–37.
3. *Grinchenko V. T., Meleshko V. V.* Harmonic oscillations and waves in solid bodies, Kiev: Nauk. Dumka, 1981.
4. *Kolsky G.* Waves of stress in solid bodies, M.: IL, 1955 (in Russian).
5. *Mechanics of coupled fields in constructional elements. Vol. 5 Elasolectricity*, Kiev: Nauk. Dumka, 1989 (in Russian).
6. *Shulga N. A.* Advances of Mechanics in 6 vol., 2007: 681–702 (in Russian).
7. *Birman V., Byrd L. W.* *ASME Appl. Mech. Rev.*, 2007, **195**: 195–216.
8. *Chih-Ping Wu, Tsu-Chieh Tsai* *Appl. Math. Modelling*, 2012, **36**, Iss. 5: 1910–1930.
9. *Grigorenko A., Müller W. H., Wille R., Loza I.* *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2012, **24**, 4–6: 515–524.
10. *Grigorenko A. Ya., Loza I. A.* *Int. Applied Mech*, **47**, No 6: 118–124.

Національний транспортний університет, Київ

Поступило в редакцію 12.03.2015

**І. А. Лоза**

### **Про поширення вісесиметричних електропружних хвиль у порожнистому шаруватому циліндрі при електричному способі збудження**

Національний транспортний університет, Київ

Проведено кінематичний аналіз поширення вісесиметричних електропружних хвиль в неоднорідному по товщині порожнистому циліндрі, складеному з металевих та п'єзокерамічних шарів, поляризованих у радіальному напрямі при електричному способі збудження хвиль. Бічні поверхні циліндра вільні від механічних навантажень, і до них прикладено гармонічно змінну різницю електричного потенціалу. Для розв'язання даної задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних і зображення розв'язку у вигляді хвиль, біжущих вздовж циліндра, початкова задача теорії електропру-

жності у частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях. Отримана система розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації. Наведено результати чисельного аналізу для шаруватого циліндра, складеного з шарів п'єзокераміки PZT 4 та сталі.

**Ключові слова:** кінематичний аналіз акустoeлектричних хвиль, шаруваті п'єзокерамічні циліндри, дискретна ортогоналізація.

I. A. Loza

## About the propagation of axisymmetric elastoelectric waves in a hollow layered cylinder from metal and piezoceramic layers at electric modes of excitation

National Transport University, Kiev

*The problem of kinematic analysis of the propagation of axisymmetric elastoelectric waves in a hollow layered cylinder from metal and piezoceramic layers polarized in the radial direction is considered. The surfaces of the cylinder are free from tractions and undergo the action of a harmonically electrostatic potential. The numerical-analytical method is offered for solving this problem. After the separation of variables and the representation of a solution in the form of waves running along the cylinder, the initial problem of the theory of electroelasticity in partial derivatives is reduced to a non-homogeneous boundary value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. The numerical results are presented for a layered cylinder from metal and piezoceramic PZT layers.*

**Keywords:** kinematic analysis of elastoelectric waves, layered hollow cylinders, discrete orthogonalization.