

***H*-розв'язність задачі оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності**

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

*Розглянуто задачу оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності з ваговою функцією потенціального типу, що входить до диференціального оператора. Доведено розв'язність задачі оптимального керування в класі так званих *H*-допустимих розв'язків. Встановлено властивість замкненості множини *H*-допустимих пар у добутку топологій простору керувань та простору станів.*

Ключові слова: задача оптимального керування, еліптична варіаційна нерівність, вироджена вагова функція потенціального типу, *H*-допустимий розв'язок, *H*-оптимальний розв'язок.

У роботі досліджується задача оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності. Як відомо, при вивченні оптимізаційних задач з таким об'єктом керування можуть виникати такі проблеми, як ефект Лаврентьєва, неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності і, як наслідок, неєдиність визначення оптимального розв'язку. У роботі [1] вихідна вироджена задача зведена до еквівалентної в певному сенсі задачі в “класичному” соболевському просторі і обґрунтована її розв'язність у випадку, коли вагова функція є функцією потенціального типу. Аналогічним чином ця проблема вирішується і в роботах [2, 3] для виродженої параболічної варіаційної нерівності. В межах даного дослідження пропонується альтернативний підхід до вивчення проблеми розв'язності згаданої задачі оптимального керування для виродженої еліптичної варіаційної нерівності. А саме, аналогічно [4], де досліджено оптимізаційну задачу для виродженої нелінійної монотонної варіаційної нерівності з керуванням у коефіцієнтах, вводиться до розгляду клас так званих *H*-допустимих розв'язків. Відтак, в роботі за допомогою прямого варіаційного методу обґрунтовано *H*-розв'язність оптимізаційної задачі для виродженого об'єкта керування.

1. Основні означення та допоміжні факти. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) — відкрита обмежена область з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ така, що $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω . Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з носіями в Ω .

Нехай ρ є заданою функція $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $\rho(x) > 0$ майже скрізь (м. с.) на Ω ,

$$\rho \in L^1(\Omega), \quad \rho^{-1} \in L^1(\Omega), \quad \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \quad \text{і} \quad \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \quad (1)$$

Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина $\mathcal{O}$ множини Ω така, що

$$\text{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = \varepsilon, \quad \rho > \varepsilon \quad \text{м. с. в} \quad \Omega \setminus \mathcal{O} \quad \text{і} \quad \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{O}) \quad (2)$$

для деякого $\varepsilon > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω .

Вагові простори. Надалі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1), (2) називатимемо виродженою ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho dx)$, $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$, для яких $f \in L^2(\Omega, \rho dx)$, якщо $\|f\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 = \int_{\Omega} f^2 \rho dx < +\infty$, та $g \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$, якщо $\|g\|_{L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)}^2 = \int_{\Omega} g^2 \rho^{-1} dx < +\infty$. Поруч з ваговими гільбертовими просторами розглянемо ваговий простір Соболева $H(\Omega; \rho dx)$ — замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ відносно норми

$$\|y\|_{H(\Omega; \rho dx)} := \left(\int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \right)^{1/2}.$$

Зауваження 1. У випадку, коли вага $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, простір $H(\Omega, \rho dx)$ неперервно вкладається в простір $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Доведення. Дійсно, скориставшись нерівностями Гельдера і Єнсена, отримаємо

$$\|y\|_{W_0^{1,1}(\Omega)}^2 = (\|y\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N})^2 \leq C \left(\int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \right) = C \|y\|_{H(\Omega, \rho dx)}^2.$$

Введемо до розгляду таке поняття (див. [1]).

Означення 1. Будемо казати, що $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо ρ задовольняє умови (1), (2) та існує така стала $\widehat{C}(\Omega) > 0$, що виконується нерівність

$$-\widehat{C}(\Omega) \leq -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2 < \frac{2\lambda_*}{|x|_{\mathbb{R}^N}^2} = \frac{(N-2)^2}{2|x|_{\mathbb{R}^N}^2} \quad \text{в} \quad \Omega. \quad (3)$$

У цьому випадку функцію $V(x) = -\Delta \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|_{\mathbb{R}^N}^2$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ .

2. Постановка задачі. Нехай K — непорожня опукла підмножина простору $W_0^{1,2}(\Omega; \rho dx)$, яка є секвенційно замкнутою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|_{\rho}^2 := \int_{\Omega} y^2 \rho dx + \int_{\Omega} \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx. \quad (4)$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(\Omega, \rho dx)$, $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ та $u_0 \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ — задані розподілення, а U_{∂} — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ така, що

$$U_{\partial} = \{u \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx) : \|u - u_0\|_{L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)} \leq R\}. \quad (5)$$

Всюди далі функції $u \in U_{\partial}$ розглядаються як допустимі керування.

Розглянемо таку задачу оптимального керування для варіаційної нерівності з керуванням у правій частині:

$$I(u, y) = \frac{1}{2} \|y - y_{ad}\|_{L^2(\Omega, \rho dx)}^2 \rightarrow \inf, \quad (6)$$

$$u \in U_{\partial}, \quad y \in K, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx \geq \int_{\Omega} (f + u)(v - y) \, dx, \quad \forall v \in K. \quad (8)$$

Пов'яжемо з варіаційною нерівністю (8) лінійний оператор

$$A: H(\Omega; \rho \, dx) \rightarrow (H(\Omega; \rho \, dx))^*,$$

скориставшись правилом

$$\langle Ay, v \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)} = \int_{\Omega} (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx \quad \forall v \in K.$$

Тут

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)}: (H(\Omega; \rho \, dx))^* \times H(\Omega; \rho \, dx) \rightarrow \mathbb{R}$$

є операцією дуального спарювання елементів з просторів $(H(\Omega; \rho \, dx))^*$ та $H(\Omega; \rho \, dx)$ відповідно. Тоді ясно, що $Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y)$.

Розглянемо поняття H -розв'язку.

Означення 2. Будемо казати, що функція $y = y(u, f) \in K \in H$ -розв'язком виродженої варіаційної нерівності (7), (8), якщо нерівність

$$\langle -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y), v - y \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)} \geq \langle f, v - y \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)} \quad (9)$$

виконується для довільного $v \in K$.

Зауважимо, що у випадку, коли функція ρ є ваговою функцією потенціального типу в сенсі означення 1, вдається показати існування і єдиність H -розв'язку для нерівності (7), (8), а саме має місце такий результат:

Теорема 1 [1, теорема 2]. *Нехай $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1} dx)$ та $u \in U_{\partial}$ варіаційна нерівність (7), (8) має єдиний розв'язок $y = y(u, f) \in K$ такий, що $y = z/\sqrt{\rho}$ і $z \in H_0^1(\Omega)$.*

Розглянемо поняття H -оптимального розв'язку.

Означення 3. Будемо казати, що пара $(u^0, y^0) \in L^2(\Omega; \rho^{-1} dx) \times H(\Omega; \rho \, dx) \in H$ -оптимальним розв'язком задачі (6)–(8), якщо $(u^0, y^0) \in \Xi_H$ і $I(u^0, y^0) = \inf_{(u, y) \in \Xi_H} I(u, y)$, де через Ξ_H позначено множину H -допустимих пар задачі (6)–(8), що визначається таким чином:

$$\Xi_H = \{(u, y) \in U_{\partial} \times H(\Omega; \rho \, dx) \mid y \in K, (u, y) \text{ пов'язані співвідношенням (9)}\}.$$

3. Існування H -оптимальних розв'язків. У даному пункті зосередимося на доведенні існування H -оптимального розв'язку задачі (6)–(8). Для початку встановимо важливу топологічну властивість множини H -допустимих розв'язків. Насамперед введемо поняття слабкої топології в просторі $H(\Omega, \rho \, dx)$.

Означення 4. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k \geq 1} \subset H(\Omega, \rho \, dx)$ слабо збігається до елемента $y \in H(\Omega, \rho \, dx)$ при $k \rightarrow \infty$, якщо дана послідовність обмежена та $y_k \rightarrow y$ слабо в $L^2(\Omega, \rho \, dx)$ та $\nabla y_k \rightarrow \nabla y$ слабо в $L^2(\Omega, \rho \, dx)^N$, $k \rightarrow \infty$.

Зауваження 2. Розглянемо простір X_{ρ}^2 , що є замиканням множини $M = \{(y, \nabla y), y \in C_0^{\infty}(\Omega)\}$ в $L^2(\Omega, \rho \, dx) \times L^2(\Omega, \rho \, dx)^N$. Його елементами є пари (y, v) , де $y \in H(\Omega, \rho \, dx)$ і $v = \nabla y$ – його градієнт. Згідно з [5], простір X_{ρ}^2 є замкненим з $L^2(\Omega, \rho \, dx) \times L^2(\Omega, \rho \, dx)^N$.

Означення 5. Надалі добуток слабкої топології в $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ та слабкої топології в $H(\Omega, \rho dx)$ будемо позначати через τ .

Теорема 2. Нехай $\rho(x) > 0$ — вироджена вагова функція потенціального типу. Тоді для кожного $f \in L^2(\Omega; \rho^{-1}dx)$ множина Ξ_H є секвенційно τ -замкненою.

Доведення. Нехай $\{(u_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi_H$ — довільна τ -збіжна послідовність допустимих пар задачі (6)–(8) (внаслідок теореми 1 такий вибір завжди можливий). Нехай $\{(u_0, y_0)\}$ — її τ -границя. Покажемо, що $\{(u_0, y_0)\} \in \Xi_H$.

Оскільки K та U_∂ — опуклі замкнені множини в $H(\Omega; \rho dx)$ та $L^2(\Omega; \rho^{-1}dx)$ відповідно, то за лемою Мазура вони є також слабо замкненими. Тому $u_0 \in U_\partial$, $y_0 \in K$. Покажемо, що гранична пара пов'язана співвідношенням (9). Оскільки пара $\{(u_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ є допустимою для задачі (6)–(8), то

$$\langle -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y_k), y_k - v \rangle_{H(\Omega; \rho dx)} \leq \langle f + u_k, y_k - v \rangle_{H(\Omega; \rho dx)} \quad \forall v \in K. \quad (10)$$

Далі розглянемо співвідношення

$$\int_{\Omega} (f + u_k)(y_k - v) dx = \int_{\Omega} f y_k dx - \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Omega} u_k y_k dx - \int_{\Omega} u_k v dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Проаналізуємо I_3 , записавши в такому вигляді:

$$I_3 = \int_{\Omega} u_k y_k dx \pm \int_{\Omega} u_k y_0 dx = \int_{\Omega} u_k (y_k - y_0) dx + \int_{\Omega} u_k y_0 dx.$$

Розглянемо перший доданок в I_3 . З урахуванням зауваження 1 та компактного вкладення $W_0^{1,1}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$, отримаємо, що $y_k \rightarrow y_0$ в $L^1(\Omega)$. Тому з точністю до підпослідовності $y_k \rightarrow y_0$ м. с. в Ω . Отже, $\int_{\Omega} u_k (y_k - y_0) dx \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Внаслідок τ -збіжності послідовності

$\{u_k, y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ та того факту, що $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ є спряженим простором до $L^2(\Omega, \rho dx)$ (див. [6]), отримаємо, що $I_1 \rightarrow \int_{\Omega} f y_0 dx$, $I_4 \rightarrow -\int_{\Omega} u_0 v dx$, $\int_{\Omega} u_k y_0 dx \rightarrow \int_{\Omega} u_0 y_0 dx$ при $k \rightarrow \infty$. Тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f + u_k)(y_k - v) dx = \int_{\Omega} (f + u_0)(y_0 - v) dx. \quad (11)$$

Тепер перейдемо у співвідношенні (10) до границі при $k \rightarrow \infty$, скориставшись властивістю напівнеперервності знизу в просторі $L^2(\Omega; \rho dx)^N$ відносно слабкої збіжності (див. [4]) та співвідношенням (11). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \langle -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y_0), y_0 - v \rangle_{H(\Omega; \rho dx)} &= \int_{\Omega} (\nabla y_0, \nabla y_0 - \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dx = \\ &= \int_{\Omega} (\nabla y_0, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^N} \rho dx - \int_{\Omega} (\nabla y_0, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dx \leq \\ &\leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla y_k, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^N} \rho dx - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\nabla y_k, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (\nabla y_k, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx - \int_{\Omega} (\nabla y_k, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho \, dx \right) \leq \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f + u_k)(y_k - v) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f + u_k)(y_k - v) \, dx = \\
&= \int_{\Omega} (f + u_0)(y_0 - v) \, dx = \langle f + u_0, y_0 - v \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)} \quad \forall v \in K.
\end{aligned}$$

Отже, τ -гранична пара $(u_0, y_0) \in H$ -допустимою для задачі (6)–(8), а тому $(u_0, y_0) \in \Xi_H$.

Теорема 3. Нехай $\rho(x) > 0$ — вироджена вагова функція потенціального типу. Тоді множина H -оптимальних розв'язків задачі (6)–(8) є непорожньою $\forall f \in L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що функціонал вартості (6) є τ -напівнеперервним знизу на Ξ_H . Нехай $\{u_k, y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi_H$ — H -мінімізуюча послідовність задачі (6)–(8), тобто $\lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k, y_k) = \inf_{(u, y) \in \Xi_H} I(u, y) < +\infty$. З означення множини $U_{\mathcal{D}}$ отримуємо, що послідовність $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — обмежена в $L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)$. Отже, з точністю до підпослідовності, існує елемент $u^* \in U_{\mathcal{D}}$ такий, що $u_k \rightarrow u^*$ слабо в $L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)$ при $k \rightarrow \infty$. Доведемо обмеженість послідовності $\{y_k = y(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ у просторі $H(\Omega; \rho \, dx)$. З [1] відомо, що $y \in K$ може бути поданий як $y = z/\sqrt{\rho}$, де $z \in H_0^1(\Omega)$, та

$$\|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} y^2 \rho \, dx + \int_{\Omega} |\nabla(\sqrt{\rho} y)|_{\mathbb{R}^N}^2 \, dx. \quad (12)$$

Крім того, в ході доведення теореми 4 із [1] було отримано, що послідовність $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ є обмеженою в просторі $H_0^1(\Omega)$. Внаслідок (12) отримуємо, зокрема, обмеженість послідовності $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ у просторі $L^2(\Omega; \rho \, dx)$. Тепер доведемо обмеженість послідовності $\{\nabla y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ у просторі $L^2(\Omega; \rho \, dx)^N$.

Спочатку встановимо таку властивість оператора A :

$$\frac{\langle Ay, y - v_0 \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)}}{\|\nabla y\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}} \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Дійсно, з означення оператора A отримаємо

$$\langle Ay, y - v_0 \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)} \geq \|\nabla y\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}^2 - \|\nabla y\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}, \quad (14)$$

оскільки

$$\begin{aligned}
|\langle Ay, v_0 \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)}| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_0|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho \, dx \right)^{1/2} = \\
&= \|\nabla y\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N} \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}.
\end{aligned} \quad (15)$$

Враховуючи (14) та (15), одержимо (13).

Далі, припустимо, що існує підпослідовність $\{\nabla y_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{\nabla y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ така, що $\|\nabla y_{k_n}\|_{H(\Omega; \rho \, dx)} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, і, скориставшись властивістю (13) оператора A , отримаємо

$$+\infty \leftarrow \frac{\langle Ay_{k_n}, y_{k_n} - v_0 \rangle_{H(\Omega; \rho \, dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}} \leq \frac{\int_{\Omega} (f + u_{k_n})(y_{k_n} - v_0) \, dx}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho \, dx)^N}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|f + u_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)} \|y_{k_n} - v_0\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N} \leq \\
&\leq \frac{(\|f\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)} + \|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)}) (\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega; \rho dx)})}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N} \leq \\
&\leq \frac{(\|f\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)} + \|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)}) (\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)} + \|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N + \|v_0\|_{L^2(\Omega; \rho dx)})}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N} = \\
&= (\|f\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)} + \|u_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)}) \left(\frac{\|y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N} + 1 + \frac{\|v_0\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}}{\|\nabla y_{k_n}\|_{L^2(\Omega; \rho dx)}^N} \right) \leq \bar{C}
\end{aligned}$$

для довільного фіксованого елемента $v_0 \in H(\Omega; \rho dx)$, оскільки множина U_{∂} є обмеженою в просторі $L^2(\Omega; \rho^{-1} dx)$. Отримали протиріччя, що доводить обмеженість послідовності $\{\nabla y_k\}_{k \geq 1}$ у просторі $L^2(\Omega, \rho dx)^N$. Тому, з точністю до підпослідовності, існує елемент $y^* \in H(\Omega, \rho dx)$ такий, що $y_k \rightarrow y^*$ слабо в $L^2(\Omega; \rho dx)$ та $\nabla y_k \rightarrow \nabla y^*$ слабо в $L^2(\Omega, \rho dx)^N$ (див. зауваження 2) при $k \rightarrow \infty$. Оскільки внаслідок теореми 2 множина Ξ_H є секвенційно τ -замкненою, то пара $(u^*, y^*) \in H$ -допустимою для задачі (6)–(8). З τ -напівнеперервності знизу функціонала I отримуємо, що $I(u^*, y^*) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k, y_k) = \inf_{(u, y) \in \Xi_H} I(u, y)$. Отже, $(u^*, y^*) \in H$ -оптимальною парою.

Таким чином, у роботі за допомогою прямого варіаційного методу обґрунтовано існування H -оптимального розв'язку для оптимізаційної задачі (6)–(8), об'єктом керування в якій виступає вироджена еліптична варіаційна нерівність. Також показано виконання важливої топологічної властивості множини H -допустимих пар — замкненість у добутку топологій простору керувань і простору станів, адже саме серед її елементів шукається розв'язок задачі. Загалом, підхід, що базується на введенні H -допустимих розв'язків, є корисним при дослідженні досяжності H -оптимальних розв'язків вироджених задач оптимальними розв'язками неvirоджених задач.

Цитована література

1. *Задоянчук Н. В., Купенко О. П.* Про розв'язність одного класу задач оптимального керування для вироджених еліптичних варіаційних нерівностей // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – № 4(114). – С. 10–23.
2. *Задоянчук Н. В.* Задача оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: теорема існування // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2014. – № 1(115). – С. 17–38.
3. *Задоянчук Н. В.* Розв'язність одного класу задач оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності // Вісн. КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2014. – Вип. 3. – С. 36–41.
4. *Kupenko O. P.* Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2011. – No 3(106). – P. 88–103.
5. *Жиков В. В.* Замечание о соболевских пространствах // Соврем. математика и ее приложения. – 2003. – **10**, № 4. – С. 77–79.
6. *Drabek P., Nicolosi F.* Solvability of degenerate elliptic problems of higher order via Leray-Lions theorem // Hiroshima Math. J. – 1996. – **26**. – P. 79–90.

References

1. Zadoianchuk N. V., Kупenko O. P. J. obchislualnoi ta prikladnoi matematiki, 2013, No 4 (114): 10–23 (in Ukrainian).
2. Zadoianchuk N. V. J. obchislualnoi ta prikladnoi matematiki, 2014, No 1(115): 17–38 (in Ukrainian).
3. Zadoianchuk N. V. Visnik KNU im. Tarasa Shevchenka, Ser.: fiziko-matematichni nauki, 2014, Iss. 3: 36–41 (in Ukrainian).
4. Kупenko O. P. J. obchislualnoi ta prikladnoi matematiki, 2011, No 3(106): 88–103.
5. Zhikov V. V. Sovremennaya matematika i prilozheniya, 2003, **10**, No 4: 77–79 (in Russian).
6. Drabek P., Nicolosi F. Hiroshima Math. J, 1996, **26**: 79–90.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 19.03.2015

Н. В. Задоянчук

***H*-разрешимость задачи оптимального управления для вырожденного эллиптического вариационного неравенства**

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

*Рассмотрена задача оптимального управления для вырожденного эллиптического вариационного неравенства с весовой функцией потенциального типа, которая входит в дифференциальный оператор. Доказана разрешимость задачи оптимального управления в классе так называемых *H*-допустимых решений. Обосновано свойство замкнутости множества *H*-допустимых пар в произведении топологий пространства управлений и пространства состояний.*

Ключевые слова: задача оптимального управления, эллиптическое вариационное неравенство, вырожденная весовая функция потенциального типа, *H*-допустимое решение, *H*-оптимальное решение.

N. V. Zadoianchuk

***H*-solvability of the optimal control problem for a degenerate elliptic variational inequality**

Taras Shevchenko National University of Kiev

*We consider the optimal control problem for a degenerate elliptic variational inequality with weight function of potential type, which is in a differential operator. We prove the solvability of the optimal control problem in the class of the so-called *H*-admissible solutions. We justify the property of closureness for the set of *H*-admissible pairs in the product of topologies of the control space and the space of states.*

Keywords: optimal control problem, elliptic variational inequality, degenerate weight function of potential type, *H*-admissible solution, *H*-optimal solution.