

Ергодичність відносно просторової змінної дискретних за часом стохастичних потоків

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. І. Портенком)

Вивчається дискретний за часом потік частинок у випадковому середовищі. Досліджуються властивості потоку за просторовою змінною у фіксований момент часу. Отримано результати про його стаціонарність та ергодичність.

Ключові слова: стохастичні потоки з дискретним часом, стаціонарні процеси, ергодичність.

Стохастичні потоки описують рух частинок у випадковому середовищі [1–9]. У таких потоках, як правило, рух окремої частинки задається дифузійним процесом. Складність будови та властивостей потоку обумовлена взаємним зв'язком цих процесів для різних частинок. Низка питань, що виникає при цьому, пов'язана з властивостями потоків за просторовою змінною у фіксований момент часу [6, 10]. Також дуже складною є структура шуму, що керує системою [5, 11].

Одним з прикладів стохастичних потоків є потік розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що керуються гладким за просторовою змінною семімартингалом $\{F(x, t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ [6]

$$\begin{aligned} dx(u, t) &= F(x(u, t), dt), \\ x(u, 0) &= u. \end{aligned} \tag{1}$$

Можна довести, що, якщо локальні характеристики семімартингала $\{F(x, t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ задовольняють умови Ліпшица та лінійного збільшення, процес $\{x(u, t), u \in \mathbb{R}, t \in [0, T]\}$ має такі властивості: для кожного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{|x(u, t)|}{(1 + |u|)^{1+\varepsilon}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2}$$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{(1 + |u|)^{1-\varepsilon}}{1 + |x(u, t)|} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3}$$

Зауважимо, що співвідношення (2), (3) відрізняються від характеру збільшення за просторовою змінною розв'язку детермінованої задачі Коші з коефіцієнтом, що задовольняє умову Ліпшица,

$$\begin{aligned} dy(u, t) &= a(y(u, t), t) dt, \\ y(u, 0) &= u, \end{aligned}$$

для якого відомо, що

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{y(u, t)}{u} = 1. \quad (4)$$

Ця відмінність стохастичного потоку від детермінованого є суттєвою. У роботі [10] побудовано приклад стохастичного диференціального рівняння з ліпшицевими коефіцієнтами такий, що відповідний стохастичний потік задовольняє

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} \frac{|x(u, t)|}{|u|h(u)} = 1 \quad \text{м.н.}, \quad (5)$$

де $h(u) = \exp \sqrt{\log \log |u|}$.

Але деякі стохастичні потоки, що не можуть бути описані за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами, мають властивості, аналогічні властивості (4) детермінованого потоку. Так, наприклад, для потоку, що складається з броунівських частинок, виконується співвідношення (4). Це відбувається за рахунок леми Бореля–Кантелі. На додачу до цього, інколи має місце ергодичність за просторовою змінною стохастичного потоку у фіксований момент часу. Прикладом таких потоків можуть бути потоки дифузійних частинок із сингулярною взаємодією. Потоки зі склеюванням було побудовано в роботах [3, 4] та вивчено в роботах [5, 8, 9, 10]. Саме властивість ергодичності вивчається у даній роботі.

При дослідженні розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь використовується дискретна апроксимація Ейлера–Маруями [12]. Цей підхід дає можливість звести дослідження до аналізу випадкових блукань. Аналогічно можна побудувати дискретну за часом апроксимацію стохастичного потоку [13]. У ролі шуму, що керує системою частинок, виступає послідовність стаціонарних незалежних гауссових процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$. У роботі ми доводимо, що зі стаціонарності та ергодичності за просторовою змінною шуму випливає стаціонарність та ергодичність стохастичного потоку з дискретним часом.

1. Стохастичні потоки з дискретним часом та їх ергодичність. Система взаємодіючих гауссових блукань на прямій $\{x(u, n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, яка наближує потоки броунівських частинок, була побудована та досліджена у роботі І.І. Ніщенко [13]. Нехай $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ — незалежні стаціонарні гауссові процеси з нульовим середнім та неперервною коваріаційною функцією Γ , $\Gamma(0) = 1$. Визначимо $\{x(u, n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ за допомогою рекурентного співвідношення

$$\begin{aligned} x(u, n+1) &= x(u, n) + \xi_{n+1}(x(u, n)), \\ x(u, 0) &= u, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Неперервність функції Γ та незалежність процесів $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ гарантують коректність означення. Основною відмінністю потоку з дискретним часом від потоків з неперервним часом є те, що частинки можуть змінювати початкову впорядкованість, тобто відображення $x(\cdot, N)$ може бути не монотонним. У цій роботі дослідження властивостей відображення $x(\cdot, N)$ базується на ергодичній теорії стаціонарних процесів.

Перш за все відзначимо, що процес $\{x(u, n) - u, u \in \mathbb{R}\}$ при кожному $n \geq 1$ є стаціонарним, а саме має місце така лема.

Лема 1. Процес, що набуває значень в $\mathbb{R}^\infty$

$$\{(\xi_1(u), x(u, 1) - u, \xi_2(u), x(u, 2) - u, \dots, \xi_n(u), x(u, n) - u, \dots), u \in \mathbb{R}\}$$

є стаціонарним у вузькому сенсі.

Доведення. Позначимо $\varkappa_n(u) = (\xi_1(u), x(u, 1) - u, \dots, \xi_n(u), x(u, n) - u)$. Оскільки σ -алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ породжується алгеброю $\mathcal{A} = \{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n, B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}), n \geq 1\}$, то достатньо перевірити, що виконується рівність

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\varkappa_n(u_i + h) \in B_1^i \times \dots \times B_{2n}^i\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\varkappa_n(u_i) \in B_1^i \times \dots \times B_{2n}^i\}\right). \quad (7)$$

Доведення проведемо за методом математичної індукції за n . При $n = 1$ маємо $x(u, 1) - u = \xi_1(u)$ та рівність (7) виконується внаслідок стаціонарності процесу ξ_1 . Нехай рівність (7) є вірною при n . Тоді при $n + 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{\varkappa_{n+1}(u_i + h) \in B_1^i \times \dots \times B_{2n+2}^i\}\right) &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \mathbb{P}\{\varkappa_n(u_i + h) \in B_1^i \times \dots \times B_{2n}^i\} \times \right. \\ &\times \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{(\xi_{n+1}(u_i + h), x(u_i + h, n) - (u_i + h) + \xi_{n+1}(x(u_i + h, n))) \in \right. \\ &\left. \left. \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\} | \xi_1, \dots, \xi_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^k \mathbb{P}\{\varkappa_n(u_i + h) \in B_1^i \times \dots \times B_{2n}^i\} \times \right. \\ &\left. \times \varphi(x(u_1 + h, n) - (u_1 + h), \dots, x(u_k + h, n) - (u_k + h))\right], \end{aligned}$$

де

$$\varphi(y_1, \dots, y_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{(\xi_{n+1}(u_i + h), y_i + \xi_{n+1}(y_i + (u_i + h))) \in B_{2n+1}^i \times B_{2n+2}^i\}\right).$$

Використовуючи припущення індукції та стаціонарність процесів $\{\xi_n\}$, робимо висновок, що отриманий вираз не залежить від h . Лему доведено.

Наведемо основні означення та результати, пов'язані з ергодичністю стаціонарного процесу [15]. Нехай $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ — стаціонарний у вузькому сенсі процес в $\mathbb{R}$. Позначимо через $M(\mathbb{R})$ множину всіх функцій на $\mathbb{R}$ з σ -алгеброю $\mathfrak{S}$, що породжується циліндричними множинами. Визначимо міру μ_X на $\mathfrak{S}$, що пов'язана з процесом X :

$$\mu_X\{f \in M(\mathbb{R}) : f(u_1) \in \Delta_1, \dots, f(u_k) \in \Delta_k\} = \mathbb{P}\{X(u_1) \in \Delta_1, \dots, X(u_k) \in \Delta_k\},$$

$$k \geq 1, \quad \Delta_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Означення 1. (i) Вимірна функція F на $M(\mathbb{R})$ називається інваріантною, якщо при всіх $f \in M$

$$F(f(\cdot + x)) = F(f(\cdot)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Множина $A \in \mathfrak{S}$ називається інваріантною, якщо $\mathbb{I}_A$ є інваріантною функцією.

Означення 2. Стаціонарний у вузькому сенсі процес $\{X(u), u \in \mathbb{R}\}$ називаємо ергодичним, якщо для кожної інваріантної множини A

$$\mu_X(A) \in \{0, 1\}.$$

Для ергодичних процесів має місце така теорема.

Теорема 1 (Біркгофа–Хінчина). *Нехай X — ергодичний процес. Тоді для $F \in L^1(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$ існують границі*

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U F(X(\cdot + u)) du = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^U F(X(\cdot + u)) du = \int_M F d\mu_X. \quad (8)$$

Для перевірки ергодичності процесу більш зручно користуватися такою властивістю.

Означення 3. Процес X задовольняє властивість перемішування, якщо для двох довільних функцій $F, G \in L^2(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_M F(f(\cdot + u)) G(f(\cdot)) \mu_X(df) = \int_M F(f) \mu_X(df) \int_M G(f) \mu_X(df). \quad (9)$$

Відомо [15], що стаціонарний гауссів процес задовольняє властивість перемішування, якщо його коваріаційна функція $r(h) = \mathbb{E}X(u)X(u+h)$ прямує до нуля при $h \rightarrow \infty$.

Зауважимо, що властивість перемішування достатньо перевіряти на класі функцій

$$\mathcal{E} = \{F: F(X) = \exp\{i(\vec{\lambda}, X(\vec{u}))\}, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m, X(\vec{u}) = (X(u_1), \dots, X(u_m)), \vec{u} \in \mathbb{R}^m, m \geq 1\}.$$

Дійсно, з теореми Банаха–Штейнгауза випливає, що для обмеженої білінійної форми $\int_M F(f(\cdot + u)) G(f(\cdot)) \mu_X(df)$ збіжність (9) для $F, G \in L^2(M, \mathfrak{S}, \mu_X)$ випливає з виконання цієї властивості на всюди щільній підмножині.

Основним результатом роботи є таке твердження про ергодичність процесу $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2. *Нехай потік $\{x(u, n), u \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ побудовано за послідовністю гауссових процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}_{n \geq 1}$ з коваріаційною функцією Γ такою, що $\Gamma(u) \rightarrow 0, u \rightarrow \infty$. Тоді процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ є ергодичним для кожного $N \geq 1$.*

Доведення. Перевіримо, що процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування, використовуючи метод математичної індукції. При $N = 1$ маємо $x(u, 1) - u = \xi_1(u)$. Як було зауважено, гауссів процес задовольняє умову перемішування, якщо $\Gamma(u) \rightarrow 0, u \rightarrow \infty$. Припустимо, що для процесу $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ виконується (8) при $N = n$. Тоді для $N = n + 1$ і функцій $F, G \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \int_M F(f(\cdot + h)) G(f(\cdot)) \mu_{(x(u, n+1) - u)}(df) &= \mathbb{E} \exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u} + \vec{h}, n+1) - (\vec{u} + \vec{h}))\} \times \\ &\times \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n+1) - \vec{v})\}, \end{aligned}$$

де $x(\vec{v}, n) = (x(v_1, n), \dots, x(v_m, n))$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{h} = (h, \dots, h) \in \mathbb{R}^m$, та

$$F(f) = \exp\{i(\vec{\alpha}, f(\vec{u}))\}, \quad G(f) = \exp\{i(\vec{\beta}, f(\vec{v}))\}.$$

Використовуючи рекурентне співвідношення для x_n , маємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp\{i(\vec{\alpha}, x((\vec{u} + \vec{h}), n + 1) - (\vec{u} + \vec{h}))\} \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n + 1) - \vec{v})\} = \\ & = \mathbb{E}[\exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u} + \vec{h}, n) - (\vec{u} + \vec{h}))\} \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v})\} \times \\ & \quad \times \exp\{-\frac{1}{2}(K(x(\vec{u} + \vec{h}, n), x(\vec{v}, n))\alpha\beta, \alpha\beta)\}], \end{aligned}$$

де через $K(\vec{u}, \vec{v})$ позначено коваріаційну матрицю гауссового вектора $(\xi_n(u_1), \dots, \xi_n(u_m), \xi_n(v_1), \dots, \xi_n(v_m))$ в $\mathbb{R}^{2m}$ та $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$. Продовжуючи рівність, отримуємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u} + \vec{h}, n) - (\vec{u} + \vec{h}))\} \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v})\} \times \right. \\ & \quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Gamma(x(u_i + h, n) - x(u_j + h, n))\alpha_i\alpha_j\right\} \times \\ & \quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Gamma(x(v_i, n) - x(v_j, n))\beta_i\beta_j\right\} \times \\ & \quad \left. \times \exp\left\{-\sum_{i,j=1}^m \Gamma(x(u_i + h, n) - x(v_j, n))\alpha_i\beta_j\right\} \right]. \end{aligned}$$

Відзначимо, що $|x(u_i + h, n) - x(v_j, n)| \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$ при $h \rightarrow \infty$, отже, $\Gamma(x(u_i + h, n) - x(v_j, n)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $h \rightarrow \infty$. За припущенням індукції $\{x(u, n) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування, тому отриманий вираз має границю при $h \rightarrow \infty$, яка дорівнює

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp\left\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}, n) - \vec{u}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Gamma(x(u_i, n) - x(u_j, n))\alpha_i\alpha_j\right\} \times \\ & \quad \times \mathbb{E} \exp\left\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n) - \vec{v}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \Gamma(x(v_i, n) - x(v_j, n))\beta_i\beta_j\right\} = \\ & = \mathbb{E} \exp\{i(\vec{\alpha}, x(\vec{u}, n + 1) - \vec{u})\} \mathbb{E} \exp\{i(\vec{\beta}, x(\vec{v}, n + 1) - \vec{v})\}. \end{aligned}$$

Таким чином, процес $\{x(u, N) - u, u \in \mathbb{R}\}$ задовольняє умову перемішування. Зауважимо, що ергодичність процесу впливає з доведеної властивості. Для цього достатньо в (9) як F та G взяти індикатори інваріантних множин. Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай λ — міра Лебега на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Тоді для довільного $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\frac{\lambda\{u \in [-U, U] : x(u, N) - u \in \Delta\}}{2U} \rightarrow \mathbb{P}\{x(0, N) \in \Delta\}$$

при $U \rightarrow \infty$.

Доведення. Ця властивість отримана застосуванням теореми Біркгофа–Хінчина до функції $F(X) = \mathbb{I}_{\{X(0) \in \Delta\}}$.

При умові гладкості коваріаційної функції процесів $\{\xi_n(u), u \in \mathbb{R}\}$ $\Gamma \in C^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ процес $\{x(u, N), u \in \mathbb{R}\}$ є диференційовним. Використовуючи ергодичність за просторовою змінною процесу $\{x'(u, N), u \in \mathbb{R}\}$, зробимо висновок про те, наскільки порушується монотонність відображення $x(\cdot, n)$

Наслідок 2.

$$\lim_{U \rightarrow \infty} -\frac{1}{U} \int_0^U x'(u, n) \Pi_{\{x'(u, n) < 0\}} du = C, \quad C > 0.$$

Доведення. З ергодичної теореми випливає

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U x'(u, n) du = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{x(U, n) - x(0, n)}{U} = 1. \quad (10)$$

З іншого боку,

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U |x'(u, n)| du = \mathbb{E}|(x'(u, n))|. \quad (11)$$

Зауважимо, що $\{|x'(u, n)|\}_{n \geq 1}$ є супермартингалом, $|x'(u, 0)| = 1$. Тому $\mathbb{E}|(x'(u, n))| > 1$, оскільки супермартингал $|x'(u, n)|$ не є детермінованим. Порівнюючи (10) та (11), отримуємо

$$-\frac{1}{U} \int_0^U x'(u, n) \Pi_{\{x'(u, n) < 0\}} du \rightarrow C, \quad C > 0.$$

Таким чином, міра тих точок прямої, які змінили б порядок при відображенні $x(\cdot, n)$, є нескінченною.

Роботу виконано за часткової підтримки гранту Національної академії наук України та Російського фонду фундаментальних досліджень, проект № 09-01-14.

Цитована література

1. Norris J. R. Smoluchowski's coagulation equation: uniqueness, nonuniqueness and a hydrodynamic limit for the stochastic coalescent // Ann. Appl. Probab. – 1999. – **9**. – P. 78–109.
2. Zirbel C. L., Cinlar E. Dispersion of particle systems in Brownian flows // Adv. Appl. Prob. – 1996. – **28**, No 1. – P. 53–74.
3. Arratia R. Coalescing Brownian motions on the line. – Madison: University of Wisconsin-Madison, 1979. – 256 p.
4. Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 // Stochastic Processes and their Applications. – 1984. – **17**, No 2. – P. 187–210.
5. Le Jan Y., Raimond O. Flows, coalescence and noise // Ann. Probab. – 2004. – **32**, No 2. – P. 1247–1315.
6. Kunita H. Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 346 p. – (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 24).
7. Kraichnan R. Dynamical stochastic modeling of turbulence // Turbulence in Fluid flows. – New York: Springer, 1993. – P. 73–86. – (IMA Volumes in Mathematics and its Applications; Vol. 55).
8. Дороговцев А. А. Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.

9. *Конаровський В. В.* Система взаємодіючих частинок зі змінною масою: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук / Інститут математики НАН України. – Київ, 2011. – 126 с.
10. *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.* Spatial estimates for stochastic flows in Euclidean space // *Ann. Probab.* – 1998. – **26**, No 1. – P. 56–77.
11. *Warren J., Watanabe S.* On spectra of noises associated with Harris flows // *arXiv: math/0307287*. – 2003.
12. *Кузнецов Д. Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – Ст.-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 786 с.
13. *Nishenko I. I.* Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line // *Theory Stoch. Process.* – 2011. – **17**, No 1. – P. 70–78.
14. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
15. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. – Москва: Наука, 1990. – 272 с.

References

1. *Norris J. R.* *Ann. Appl. Probab.*, 1999, **9**: 78–109.
2. *Zirbel C. L., Cinlar E.* *Adv. Appl. Prob.*, 1996, **28**, No 1: 53–74.
3. *Arratia R.* Coalescing Brownian motions on the line, Madison: University of Wisconsin–Madison, 1979.
4. *Harris T. E.* *Stochastic Processes and their Applications*, 1984, **17**, No 2: 187–210.
5. *Le Jan Y., Raimond O.* *Ann. Probab.*, 2004, **32**, No 2: 1247–1315.
6. *Kunita H.* *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 24, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
7. *Kraichnan R.* *Turbulence in Fluid flows*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 55, New York: Springer, 1993: 73–86.
8. *Dorogovtsev A. A.* *Measure-Valued Processes and Stochastic Flows*, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2007 (in Russian).
9. *Konarovskii V. V.* System of interaction particles with changeable mass, PhD dissertation, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, 2011 (in Ukrainian).
10. *Mohammed S.-E. A., Scheutzow M. K. R.* *Ann. Probab.*, 1998, **26**, No 1: 56–77.
11. *Warren J., Watanabe S.* On spectra of noises associated with Harris flows, *arXiv: math/0307287*, 2003.
12. *Kuznetsov D. F.* *Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Analysis*, Saint-Petersburg: Polytechnic Univ., 2010 (in Russian).
13. *Nishenko I. I.* *Theory Stoch. Process.*, 2011, **17**, No 1: 70–78.
14. *Kornfeld I. P., Sinai Ya. G., Fomin S. V.* *Ergodic Theory*, Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
15. *Rozanov Yu. A.* *Stationary Random Processes*, Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 11.03.2015

Е. В. Глиняная

Эргодичность относительно пространственной переменной дискретных по времени стохастических потоков

Інститут математики НАН України, Київ

Изучается дискретный по времени поток частиц в случайной среде. Исследуются свойства потока по пространственной переменной в фиксированный момент времени. Получены результаты о его стационарности и эргодичности.

Ключевые слова: стохастические потоки с дискретным временем, стационарные процессы, эргодичность.

E. V. Glinyanaya

Ergodicity with respect to the spatial variable of discrete-time stochastic flows

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

We consider a discrete-time flow of particles in the random environment and investigate spatial properties for such flow at a fixed moment of time. Results about the stationarity and ergodicity of the flow are obtained.

Keywords: discrete-time stochastic flows, stationary processes, ergodicity.