

О нестационарном деформировании упругого слоя при смешанных граничных условиях

Построено аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого слоя в условиях смешанной краевой задачи на каждой граничной поверхности. Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, обращение которых удастся выполнить точно с помощью табличных соотношений и теорем о свертках и получить аналитические выражения для напряжений и перемещения. Конкретно рассмотрен случай нагрузки, приложенной к области постоянных размеров. Проанализированы характерные особенности волновых процессов.

Ключевые слова: нестационарное нагружение, упругий слой, смешанные условия.

Задачи нестационарного деформирования упругих объектов типа упругого полупространства или полуплоскости имеют обширную библиографию (см., например [1, 2]). Среди последних публикаций можно указать на работы автора [3, 4], в которых получены некоторые аналитические и численно-аналитические решения для полубесконечных объектов типа упругой полуплоскости или полупространства при различных типах граничных условий. Для тел ограниченных размеров, например, для упругого слоя, характерной особенностью волновых процессов, возбуждаемых на одной из границ, является многократное очередное отражение возбужденных волн от границ. Тем самым в теле создается сложное напряженное состояние. Такая задача значительно сложнее и требует выработки специальных подходов к ее решению. В работах [5, 6] применительно к исследованию раннего этапа проникания затупленного индентора в поверхность упругого слоя построено решение, позволяющее проанализировать характер распространения прямых и отраженных упругих волн и напряженно-деформированное состояние на оси симметрии задачи в плоском и осесимметричном случаях.

В данной работе строится точное аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого слоя в условиях, когда на граничных поверхностях определены смешанные граничные условия: на одной из границ задана действующая нагрузка в виде нормального напряжения и касательное перемещение (четвертая краевая задача), тогда как на другой границе условия состоят в отсутствии нормального перемещения и касательного напряжения (третья задача). Применяются интегральные преобразования Лапласа и Фурье, обращение которых удастся выполнить при помощи табличных соотношений и теорем о свертке для широкого ассортимента действующих нестационарных нагрузок и получить выражение для напряжения (перемещения) в замкнутом виде.

1. Рассматривается равновесие упругого слоя толщиной h , к поверхности которого в момент времени $t = 0$ приложена нестационарная нагрузка. Вводятся декартовы координаты x, z , так что ось x направлена вдоль границы слоя, к которой приложена нагрузка, ось z — в глубину слоя (рис. 1). Задача формулируется в условиях плоской деформации. Нормальная нагрузка $Q(x, t)$, симметричная относительно оси z , в общем случае является функцией времени и координаты x .

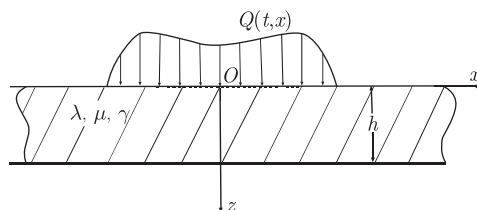


Рис. 1. Система координат

Задача формулируется в безразмерных обозначениях, черта над которыми в дальнейшем опущена:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{z} = \frac{z}{R}; \quad \bar{u}_j = \frac{u_j}{R}; \quad \bar{t} = \frac{c_p t}{R}; \quad \bar{\sigma}_{jk} = \frac{\sigma_{jk}}{\lambda + 2\mu}; \quad \alpha = \frac{c_p}{c_0}; \quad \beta = \frac{c_s}{c_0};$$

$$b = \frac{\beta}{\alpha}; \quad j, k = x, z; \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\gamma}}; \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}.$$

Здесь R и c_0 — некоторые характерные линейный размер и скорость; γ — плотность материала; λ, μ — упругие постоянные Ламе; c_p, c_s — соответственно скорости распространения волн расширения и волн сдвига; σ_{jk} — компоненты напряженного состояния; u_j — компоненты вектора перемещений.

Поведение упругой среды описывается волновыми потенциалами Φ и Ψ , которые в случае плоской задачи удовлетворяют волновым уравнениям [7]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и связаны с упругими перемещениями и напряжениями соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\beta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} \right);$$

$$\sigma_{xz} = \beta^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right).$$

В качестве граничных условий при $z = 0$ будем рассматривать смешанные условия четвертой краевой задачи теории упругости, согласно которой на границе задается нормальное напряжение и отсутствует касательное перемещение. На тыльной поверхности слоя (при $z = h$) отсутствует нормальное перемещение u_z и касательное напряжение σ_{xz} (вторая краевая задача)

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = Q(x, t), \quad u_x|_{z=0} = 0,$$

$$u_z|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{xz}|_{z=h} = 0. \quad (3)$$

Начальные условия для потенциалов нулевые.

2. Если волновые уравнения (1) подвергнуть преобразованию Лапласа по времени (с учетом нулевых начальных условий) и преобразованию Фурье по координате x (предполагая,

что при $|x| \rightarrow \infty$ потенциалы и их первые производные стремятся к нулю), они приобретут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\alpha^2} + \xi^2 \right) \Phi^{LF} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi^{LF}}{\partial z^2} - \left(\frac{s^2}{\beta^2} + \xi^2 \right) \Psi^{LF} = 0. \quad (4)$$

Здесь s — параметр преобразования Лапласа; ξ — параметр преобразования Фурье.

Общее решение уравнений (4) при нулевых начальных условиях записывается в виде

$$\Phi^{LF} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A(s, \xi) e^{-\frac{z}{\alpha} P} + \tilde{A}(s, \xi) e^{\frac{z}{\alpha} P} \right); \quad \Psi^{LF} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B(s, \xi) e^{-\frac{z}{\beta} S} + \tilde{B}(s, \xi) e^{\frac{z}{\beta} S} \right);$$

$$P = \sqrt{s^2 + \alpha^2 \xi^2}; \quad S = \sqrt{s^2 + \beta^2 \xi^2}.$$

Здесь $A(s, \xi)$, $\tilde{A}(s, \xi)$, $B(s, \xi)$, $\tilde{B}(s, \xi)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий.

В результате удовлетворения граничным условиям (3) определяются произвольные постоянные и выражение для изображения напряжения σ_{zz} имеет вид

$$\sigma_{zz}^{LF} = Q^{LF}(\xi, s) \frac{1}{s^2} \left[(s^2 + 2\beta^2 \xi^2) \frac{e^{-\frac{z}{\alpha} P} \left(1 + e^{-2\frac{h-z}{\alpha} P} \right)}{\left(1 + e^{-2\frac{h}{\alpha} P} \right)} - 2\beta^2 \xi^2 \frac{e^{-\frac{z}{\beta} S} \left(1 + e^{-2\frac{h}{\beta} S} e^{2\frac{z}{\beta} S} \right)}{\left(1 + e^{-2\frac{h}{\beta} S} \right)} \right]. \quad (5)$$

Раскладывая знаменатель обеих дробей в ряд Тейлора, получим

$$\sigma_{zz}^{LF} = Q^{LF}(\xi, s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n g_n^{LF}(s, \xi, z), \quad (6)$$

где

$$g_n^{LF}(s, \xi, z) = \left(1 + 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^2} \right) \left(e^{-\frac{2nh+z}{\alpha} P} + e^{-\frac{2(n+1)h-z}{\alpha} P} \right) - 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^2} \left(e^{-\frac{2nh+z}{\beta} S} + e^{-\frac{2(n+1)h-z}{\beta} S} \right). \quad (7)$$

Полагаем, что внезапно приложенная нагрузка и ее изображения по Лапласу и Фурье имеют вид

$$Q(t, x) = Q_0 H(t) G(x); \quad Q^L(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G(x); \quad Q^{LF}(s, \xi) = Q_0 \frac{1}{s} G^F(\xi). \quad (8)$$

Здесь $H(t)$ — единичная функция Хевисайда [8]. Функция $G(x)$ задает характер распределения вдоль оси x действующего напряжения.

Из (6), (7) имеем

$$\sigma_{zz}^{LF}(s, \xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zzn}^{LF}(s, \xi, z), \quad (9)$$

где обозначено

$$\sigma_{zzn}^{LF}(s, \xi, z) = (-1)^n Q_0 G^F(\xi) \tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z),$$

$$\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z) = \left(\frac{1}{s} + 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^3} \right) \left(e^{-\frac{2nh+z}{\alpha} P} + e^{-\frac{2(n+1)h-z}{\alpha} P} \right) -$$

$$- 2\beta^2 \frac{\xi^2}{s^3} \left(e^{-\frac{2nh+z}{\beta} S} + e^{-\frac{2(n+1)h-z}{\beta} S} \right). \quad (10)$$

Задача теперь состоит в обращении интегральных преобразований. Для обращения преобразования Фурье функции $\tilde{g}_n^{LF}(s, \xi, z)$ воспользуемся табличным соотношением [8]

$$F^{-1}(e^{-b\sqrt{s^2+\xi^2}}) = sb \frac{1}{\pi \sqrt{x^2+b^2}} K_1(s\sqrt{x^2+b^2}) \quad (11)$$

и известным свойством

$$F^{-1}[\xi^{2m} f^F(\xi)] = (-1)^m \frac{d^{2m}}{dx^{2m}} f(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Здесь $K_1(t)$ — цилиндрическая функция Макдональда [9].

Для обращения преобразования Лапласа используем табличные соотношения вида

$$L^{-1}[K_1(sa)] = H(t-a)ta^{-1}(t^2-a^2)^{-1/2} \quad (13)$$

и производные от них, получаемые, например, при помощи известных свойств интегрирования оригинала [8]. В результате, используя формулы (10)–(13), получим функцию $\bar{g}_n(t, x, z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(t, x, z) = & \frac{1}{\pi} \{ H(\alpha t - r_n) F_n^{(\alpha)}(t, x, z_n) + H(\alpha t - \bar{r}_n) F_n^{(\alpha)}(t, x, \bar{z}_n) + \\ & + H(\beta t - r_n) F_n^{(\beta)}(t, x, z_n) + H(\beta t - \bar{r}_n) F_n^{(\beta)}(t, x, \bar{z}_n) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} z_n &= 2nh + z; & \bar{z}_n &= (2n+1)h - z; & r_n &= \sqrt{x^2 + z_n^2}; & \bar{r}_n &= \sqrt{x^2 + \bar{z}_n^2}; \\ \zeta_{\alpha n}(t, x, z_n) &= \sqrt{\alpha^2 t^2 - r_n^2}; & \zeta_{\beta n}(t, x, z_n) &= \sqrt{\beta^2 t^2 - r_n^2}; \\ \zeta_{\alpha n}(t, x, \bar{z}_n) &= \sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{r}_n^2}; & \zeta_{\beta n}(t, x, \bar{z}_n) &= \sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{r}_n^2}; \\ F_n^{(\alpha)}(t, x, z_n) &= tz_n \left\{ \frac{\alpha}{r_n^2 \zeta_{\alpha n}(t, x, z_n)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left[\frac{x^2}{r_n^4 \zeta_{\alpha n}(t, x, z_n)} + \frac{(3x^2 - z_n^2)}{r_n^6} \zeta_{\alpha n}(t, x, z_n) \right] \right\}; \\ F_n^{(\alpha)}(t, x, \bar{z}_n) &= t\bar{z}_n \left\{ \frac{\alpha}{\bar{r}_n^2 \zeta_{\alpha n}(t, x, \bar{z}_n)} - \frac{2\beta^2}{\alpha} \left[\frac{x^2}{\bar{r}_n^4 \zeta_{\alpha n}(t, x, \bar{z}_n)} + \frac{(3x^2 - \bar{z}_n^2)}{\bar{r}_n^6} \zeta_{\alpha n}(t, x, \bar{z}_n) \right] \right\}; \\ F_n^{(\beta)}(t, x, z_n) &= 2\beta tz_n \left[\frac{x^2}{r_n^4 \zeta_{\beta n}(t, x, z_n)} + \frac{(3x^2 - z_n^2)}{r_n^6} \zeta_{\beta n}(t, x, z_n) \right]; \\ F_n^{(\beta)}(t, x, \bar{z}_n) &= 2\beta t\bar{z}_n \left[\frac{x^2}{\bar{r}_n^4 \zeta_{\beta n}(t, x, \bar{z}_n)} + \frac{(3x^2 - \bar{z}_n^2)}{\bar{r}_n^6} \zeta_{\beta n}(t, x, \bar{z}_n) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения компонента напряжения $\sigma_{zzn}(t, x, z)$, согласно (10), теперь можно воспользоваться сверткой преобразования Фурье для функций $G(x)$ и $\bar{g}_n(t, x, z)$ [9]

$$\sigma_{zzn}(t, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi) \bar{g}_n(t, \xi, z) d\xi. \quad (16)$$

Возвратимся к нагрузке вида (8) и рассмотрим функцию $G(x)$ такую, что нормальная нагрузка приложена в фиксированной области $-l \leq x \leq l$, $l = \text{const}$:

$$G(x) = f(x)[H(x+l) - H(x-l)], \quad (17)$$

где $f(x)$ — некоторая функция, задающая распределение нагрузки в указанной области. Тогда из соотношений (14)–(17) следует выражение для напряжения σ_{zz} в произвольной точке полуплоскости в произвольный момент времени

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(t, x, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sigma_{zzn}(t, x, z); \quad \sigma_{zzn}(t, x, z) = Q_0 \frac{1}{\pi} \int_{x-l}^{x+l} f(x-\xi) \bar{\sigma}_{zzn}(t, \xi, z) d\xi; \\ \bar{\sigma}_{zzn}(t, \xi, z) &= H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - z_n^2} - \xi\right) F_n^{(\alpha)}(t, \xi, z_n) + H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - z_n^2} - \xi\right) F_n^{(\beta)}(t, \xi, z_n) + \\ &+ H\left(\sqrt{\alpha^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \xi\right) F_n^{(\alpha)}(t, \xi, \bar{z}_n) + H\left(\sqrt{\beta^2 t^2 - \bar{z}_n^2} - \xi\right) F_n^{(\beta)}(t, \xi, \bar{z}_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $F_n^{(\alpha)}(t, \xi, z_n)$, $F_n^{(\beta)}(t, \xi, z_n)$, $F_n^{(\alpha)}(t, \xi, \bar{z}_n)$, $F_n^{(\beta)}(t, \xi, \bar{z}_n)$ заданы формулами (15).

Упругие перемещения находятся при помощи аналогичной процедуры.

Таким образом, соотношения (15), (18) дают замкнутое аналитическое решение задачи, сформулированной в первом параграфе, в случае произвольной зависимости действующей нагрузки от времени и ее произвольного распределения вдоль фиксированного участка границы, являющегося областью задания нагрузки. Вид выражения (18) показывает, что фигурирующий в нем ряд составлен из последовательно отраженных от граничных поверхностей $z = h$ и $z = 0$ волн расширения и сдвига. Ограничивая рассмотрение конечным интервалом времени, следует бесконечный ряд по n в (18) заменить конечной суммой от 0 до N , где N — число отражений, учитываемых в решении.

Предложенный подход и полученные формулы позволяют определить конкретные характеристики напряженно-деформированного состояния упругого слоя при практически произвольной нагрузке в произвольной точке тела.

3. Рассмотрим конкретный пример, при вычислении которого были выбраны следующие значения исходных параметров:

$$Q_0 = 1,0; \quad \alpha = 1,0; \quad \beta = 0,55; \quad h = 1. \quad (19)$$

Выберем функцию $Q(t, x)$, определяющую характер распределения нагрузки вдоль оси x , в виде

$$Q(t, x) = Q_0 H(t)[H(x+l) - H(x-l)], \quad (20)$$

т. е. будем считать, что на отрезке $|x| \leq l$ напряжение σ_{zz} внезапно возникает при $t = 0$ и в дальнейшем остается постоянным во времени и на отрезке. В этом случае функция, задающая распределение напряжения на указанном отрезке $f(x) = 1$, и для $\sigma_{zzn}(t, x, z)$ вместо (18) получаем

$$\sigma_{zzn}(t, x, z) = \int_{x-l}^{x+l} \bar{\sigma}_{zzn}(t, \xi, z) d\xi, \quad (21)$$

где $\bar{\sigma}_{zzn}(t, \xi, z)$ задано второй и третьей строками в (18).

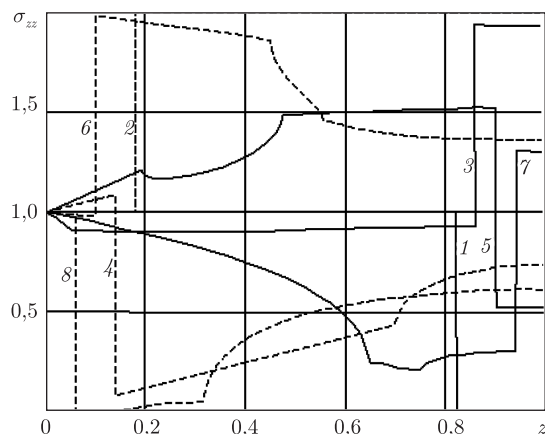


Рис. 2. Напряжение в сечении $x = 0$

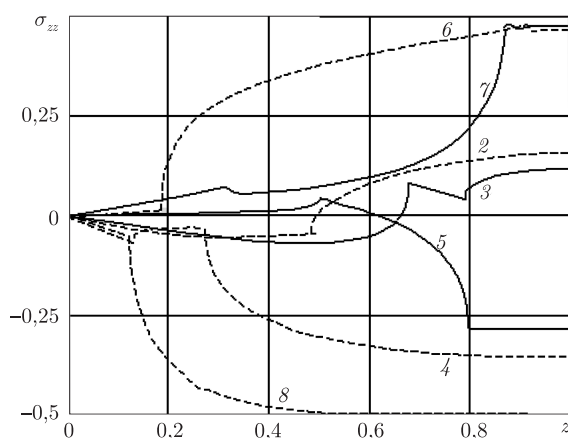


Рис. 3. Напряжение в сечении $x = 3$

В вычислениях параметр l (полуширина области действия нагрузки) принят равным 2. При интегрировании использовалась квадратурная формула трапеций, шаг интегрирования варьировался, точность вычислений обеспечивалась сравнением результатов при различных значениях шага.

На рис. 2 напряжение как функция z при $x = 0$ представлено в фиксированные моменты времени: $1 - t = 0,82$; $2 - t = 1,82$; $3 - t = 2,86$; $4 - t = 3,86$; $5 - t = 4,90$; $6 - t = 5,90$; $7 - t = 6,94$; $8 - t = 7,94$. Сплошной линией изображены графики для случаев, когда волна расширения движется к тыльной поверхности $z = h$ (кривые 1, 3, 5, 7), штриховыми линиями — когда волна движется к лицевой поверхности $z = 0$ (кривые 2, 4, 6, 8). Между соседними кривыми первой группы (как и между кривыми второй группы) отличие во времени составляет два интервала прохождения волной расширения толщины слоя. Моменты времени, для которых построены графики, выбраны таким образом, чтобы на рисунках избежать слияния кривых. Рис. 3 показывает напряжение как функцию z в сечении $x = 3$ в те же моменты времени, что и на рис. 2, так что номера кривых на обоих рисунках совпадают (очевидно, кривая 1 на рис. 3 отсутствует).

Анализ кривых на рис. 2, 3 показывает существенное различие в распределении напряжения в поперечном сечении слоя в зависимости от значения абсциссы x . На оси симметрии

($x = 0$) имеют место четко обозначенные скачки напряжения. При этом прямая (кривая 1) и первая отраженная (кривая 2) волны расширения имеют вид единичной ступеньки, тогда как характер распределения напряжения по толщине слоя при последующих отражениях все больше отличается от ступенчатого вследствие влияния волны искажения и постепенного “растекания” энергии волны в поперечном направлении. Скачки напряжения, типичные для сечения $x = 0$, заменяются достаточно плавным ростом напряжения в зафронтной области в сечениях $x \neq 0$. Напряжение может принимать как положительные, так и отрицательные значения, и соответствующие кривые группируются около нулевого значения. Имеющие место изломы графиков обусловлены присутствием фронта волны искажения и отражениями от границ.

Цитированная литература

1. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука, 1995. – 352 с.
2. Кубенко В. Д. Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуплоскости // Доп. НАН України, 2011. – № 10. – С. 67–72.
3. Кубенко В. Д. Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды. Усп. механики. В 6-ти т. – Т. 5. – Киев: Літера, 2009. – С. 566–607.
4. Кубенко В. Д., Янчевский И. В. Нестационарная нагрузка на поверхности упругой полуполосы // Прикл. механика. – 2014. – 52, № 3. – С. 46–55.
5. Kubenko V. D., Marchenko T. A. Indentation of a rigid blunt indenter into an elastic layer: a plane problem // Internat. Appl. Mech. – 2008. – 44, No 3. – P. 286–295.
6. Kubenko V. D., Marchenko T. A. Indentation of a rigid blunt indenter into an elastic layer: an axisymmetric problem // Internat. Appl. Mech. – 2008. – 44, No 7. – P. 747–756.
7. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в 2-х т. – Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 344 с.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1966. – 296 с.

References

1. Gorshkov A. G., Tarlakovsky D. V. Dynamic contact problems with moving boundaries, Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1995 (in Russian).
2. Kubenko V. D. Dopov. NAN Ukraine, 2011, No 10: 67–72.
3. Kubenko V. D. Advances of Mechanics, vol. 5, Kiev: Litera, 2009: 566–607 (in Russian).
4. Kubenko V. D., Janchevsky I. V. Internat. Appl. Mech., 2015, 52, No 3: 46–55.
5. Kubenko V. D., Marchenko T. A. Internat. Appl. Mech., 2008, 44, No 3: 286–295.
6. Kubenko V. D. Internat. Appl. Mech., 2008, 44, No 7: 747–756.
7. Guz' A. N., Kubenko V. D., Cherevko M. A. Diffraction of elastic waves, Kiev: Naukova Dumka, 1978 (in Russian).
8. Bateman H., Erdelyi A. Tables of integral transforms, in 2 vol., Vol. 1, New York: McGraw-Hill, 1954.
9. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions, in 4 vol., Vol. 1, New York: McGraw-Hill, 1953.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко
НАН України, Київ

Поступило в редакцію 14.01.2015

Академік НАН України **В. Д. Кубенко**

Про нестационарне деформування пружного шару при змішаних граничних умовах

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі про дію нестационарного навантаження на поверхню пружного шару в умовах змішаної крайової задачі на кожній граничній поверхні. Застосовуються інтегральні перетворення Лапласа і Фур'є, обернення яких удається виконати точно за допомогою табличних співвідношень і теорем про згортки та одержати аналітичні вирази для напружень і переміщення. Конкретно розглянутий випадок навантаження, прикладеного до області постійних розмірів. Проаналізовано характерні особливості хвильових процесів.

Ключові слова: нестационарне навантаження, пружний шар, змішані умови.

Academician of the NAS of Ukraine **V. D. Kubenko**

On the nonstationary deforming of an elastic layer under mixed boundary conditions

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

The problem to determine the stressed state of an elastic layer under nonstationary normal loading is considered. A mixed boundary problem is formulated, and its solution is built by using the Laplace and Fourier integral transforms. The exact inverse of transforms is evaluated. As a result, the analytical solution is obtained, and it determines a stress and a displacement at an arbitrary point of the layer. The analysis of the essential features of wave processes is performed.

Keywords: nonstationary loading, elastic layer, mixed conditions.