



УДК 517.9:519.46

Т. А. Баранник

Класифікація галілеєво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Наведено повний опис галілеєво-інваріантних систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії у випадку, коли корені характеристичного рівняння матриці дифузії є дійсними числами.

Ключові слова: рівняння реакції-дифузії, перетворення Галілея, симетрія.

1. Принцип відносності Галілея є одним із фундаментальних постулатів, який повинні задовольняти фізичні, хімічні, біологічні та інші системи. Математичною мовою це означає, що математичні моделі цих систем повинні бути інваріантними відносно груп Галілея. У даній роботі пропонується опис систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії, інваріантних відносно груп Галілея, які мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(u), \quad (1)$$

де $u = \text{стовпець}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ є вектор-функцією від t, x_1, \dots, x_m , $f(u) = \text{стовпець}(f^1, f^2, \dots, f^n)$ є вектор-функцією від u , A — невідроджена квадратна матриця порядку n . Такі системи знаходять широке застосування в теорії тепломасоперенесення, а також в математичній біології та хімії. Тому симетрійний аналіз системи рівнянь (1) має прикладне значення і може бути використаний, наприклад, для побудови точних розв'язків широкого класу фізичних і біологічних систем. Перша спроба класифікувати систему (1) у випадку $n = 2$ належить Ю. А. Данілову [1], який обмежився випадком діагональної матриці A . Дослідження літських симетрій системи (1) для $n = 2$ з діагональною матрицею A було проведено в роботах [2–4], а з матрицею дифузії A загального вигляду — у роботах [5, 6]. Завершеного вигляду ця класифікація досягла в роботі [7]. А. Г. Нікітін і Р. Вільтшире [5, 6] запропонували ефективний підхід до дослідження класичної і умовної симетрій, який може бути застосований до рівняння (1) з довільними n і m .

© Т. А. Баранник, 2015

с) Характеристичне рівняння матриці A^{-1} має s дійсних коренів і t комплексних коренів з врахуванням їх кратності. Матриця A^{-1} в даному випадку подібна до матриці

$$J_{m_1, \lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{m_k, \lambda_k} \dot{+} J_{b_1, d_1}^{n_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{b_l, d_l}^{n_l},$$

де $m_1 + \cdots + m_k = s$, $2n_1 + \cdots + 2n_l = t$. Зокрема, якщо $n_1 = \cdots = n_l = 1$, то матриця A^{-1} подібна до матриці

$$J_{m_1, \lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} J_{m_k, \lambda_k} \dot{+} J_{b_1, d_1}^1 \dot{+} \cdots \dot{+} J_{b_l, d_l}^1. \quad (6)$$

3. Опис систем рівнянь (1), які допускають перетворення Галілея, зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (3). Далі наведено розв'язки цієї системи для випадків, коли матриця A^{-1} має вигляд (4), (5), (6).

Нехай матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n, \lambda}$. Для визначення всіх можливих нелінійних форм компонент вектор-функції $f(u)$ введемо нову змінну τ , яка визначається із співвідношення

$$\frac{\partial u_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} u_b. \quad (7)$$

Лема. Першими інтегралами системи (7) є функції

$$C_k = \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{1}{\lambda^p p!} \frac{u_{k+1-p}}{u_1} \ln^p u_1, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

Теорема 1. Якщо матриця A^{-1} є кліткою Жордана $J_{n, \lambda}$, то загальний розв'язок системи (3) утворюють функції

$$f_k = u_1 \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda^p p!} \varphi_{k-p} \ln^p u_1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ є довільними функціями від перших інтегралів (8) системи рівнянь (7).

Доведення. Введемо нову змінну τ , яка визначається системою (7). Використовуючи змінну τ , рівняння (3) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} = (A^{-1})^{ab} f_b. \quad (10)$$

Проінтегрувавши систему (10), знаходимо її загальний розв'язок

$$f_k = e^{\lambda \tau} \sum_{p=0}^{k-1} \tilde{C}_{k-p} \frac{\tau^p}{p!}, \quad k = 1, \dots, n,$$

де $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n$ — довільні сталі. Враховуючи, що $u_1 = e^{\lambda \tau}$, отримуємо на підставі леми загальний розв'язок системи рівнянь (3), який визначається формулами (9). Теорема доведена.

У теоремах, що сформульовані нижче, для компактного запису компонент вектор-функції $f =$ стовпець (f_1, f_2, \dots, f_n) і $u =$ стовпець (u_1, u_2, \dots, u_n) використано такі позначення:

$$f_k^{(1)} = f_k \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, m_1;$$

$$\begin{aligned}
f_k^{(i)} &= f_{m_1+\dots+m_{i-1}+k} \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, m_i, \quad \text{якщо} \quad i > 1; \\
u_k^{(1)} &= u_k \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, m_1; \\
u_k^{(i)} &= u_{m_1+\dots+m_{i-1}+k} \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, m_i, \quad \text{якщо} \quad i > 1.
\end{aligned}$$

Теорема 2. Нехай обернена матриця дифузії A^{-1} має вигляд (4). Відповідна система рівнянь реакції-дифузії (1) інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності f^1, f^2, \dots, f^n мають такий вигляд:

$$f_k^{(i)} = u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (11)$$

де $\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_{m_i}^{(i)}$ є довільними функціями від

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, s; \\
[u_1^{(j)}]^{\lambda_1} [u_1^{(1)}]^{-\lambda_j}, \quad j = 2, \dots, s.
\end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай обернена матриця дифузії A^{-1} має вигляд (5). Відповідна система рівнянь реакції-дифузії (1) інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності f^1, f^2, \dots, f^n мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
f_1^{(i)} &= \varphi_1^{(i)} u_2^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_1^{(i)}, \\
f_2^{(i)} &= -\varphi_1^{(i)} u_1^{(i)} + \varphi_2^{(i)} u_2^{(i)}, \quad i = 1, \dots, k,
\end{aligned}$$

де $\varphi_1^{(i)}$ і $\varphi_2^{(i)}$ є довільними функціями від

$$R_i \exp\left(-\frac{b_i}{d_i} \arctan \frac{u_2^{(i)}}{u_1^{(i)}}\right), \quad R_1^{b_j} R_j^{-b_1}, \quad j = 2, \dots, k, \quad \text{де} \quad R_i^2 = [u_1^{(i)}]^2 + [u_2^{(i)}]^2.$$

Теорема 4. Нехай обернена матриця дифузії A^{-1} має вигляд (6). Відповідна система рівнянь реакції-дифузії (1) інваріантна відносно перетворень Галілея, якщо нелінійності f^1, f^2, \dots, f^n мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
f_k^{(i)} &= u_1^{(i)} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^p p!} \varphi_{k-p}^{(i)} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m_i; \quad i = 1, \dots, r; \\
f_1^{(j)} &= \varphi_1^{(j)} u_2^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_1^{(j)}, \\
f_2^{(j)} &= -\varphi_1^{(j)} u_1^{(j)} + \varphi_2^{(j)} u_2^{(j)}, \quad j = r+1, \dots, r+l,
\end{aligned}$$

де $\varphi_1^{(i)}, \dots, \varphi_{m_i}^{(i)}, \varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}$ є довільними функціями від

$$\sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{1}{\lambda_i^p p!} \frac{u_{k+1-p}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \ln^p u_1^{(i)}, \quad k = 1, \dots, m_i; \quad i = 1, \dots, r;$$

$$R_j \exp\left(-\frac{b_{j-r}}{d_{j-r}} \arctan \frac{u_2^{(j)}}{u_1^{(j)}}\right), \quad R_{r+1}^{b_1} R_{j'}^{-b_{j'-r}}, \quad j' = r+2, \dots, r+l,$$

$$\frac{[u_1^{(r+1)}]^2 + [u_2^{(r+1)}]^2}{[u_1^{(1)}]^{\frac{2b_1}{\lambda_1}}}, \quad R_j^2 = [u_1^{(j)}]^2 + [u_2^{(j)}]^2.$$

Цитована література

1. Данилов Ю. А. Групповой анализ системы Тьюринга и ее аналогов. – Москва, 1980. – 11 с. – (Препр. / АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И. В. Курчатова; 3287/1).
2. Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000. – **33**. – P. 267–282.
3. Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000. – **33**. – P. 7839–7841.
4. Cherniha R., King J. R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **36**. – P. 405–425.
5. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Proc. Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. – 2000. – **30**, Pt. 1. – P. 47–59.
6. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. Systems of reaction-diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**, No 4. – P. 1667–1688.
7. Nikitin A. G. Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations // Укр. мат. вісник. – 2005. – **2**, No 1. – P. 149–200.
8. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – Москва: Наука, 1970. – 402 с.

References

1. Danilov Yu. A. Group analysis of the Turing systems and of its analogues. Preprint, Kurchatov Institute of Atomic Energy, IAE-3287/1, Moscow, 1980 (in Russian).
2. Cherniha R., King J. R. J. Phys. A: Math. Gen., 2000, **33**: 267–282.
3. Cherniha R., King J. R. J. Phys. A: Math. Gen., 2000, **33**: 7839–7841.
4. Cherniha R., King J. R. J. Phys. A: Math. Gen., 2002, **36**: 405–425.
5. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. Proceeding of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2000, **30**, Pt. 1: 47–59.
6. Nikitin A. G., Wiltshire R. J. J. Math. Phys., 2001, **42**, No 4: 1667–1688.
7. Nikitin A. G. Ukr. math. visnyk, 2005, **2**, No 1: 149–200.
8. Malcev A. I. Foundations of linear algebra, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).

Полтавський національний педагогічний
університет ім. В. Г. Короленка

Надійшло до редакції 23.02.2015

Т. А. Баранник

Классификация галилеево-инвариантных систем нелинейных уравнений реакции-диффузии

Полтавский национальный педагогический университет им. В. Г. Короленко

Приведено полное описание галилеево-инвариантных систем нелинейных уравнений реакции-диффузии в случае, когда корни характеристического уравнения матрицы диффузии являются действительными числами.

Ключевые слова: уравнение реакции-диффузии, преобразование Галилея, симметрия.

T. A. Barannyk

The classification of the Galilei-invariant systems of nonlinear reaction-diffusion equations

V. G. Korolenko Poltava National Pedagogical University

The full description of the Galilei-invariant systems of nonlinear reaction-diffusion equations is presented in the case where the roots of the characteristic equation of the diffusion matrix are real numbers.

Keywords: reaction-diffusion equation, Galilei transformation, symmetry.