

## Плоская задача об образовании шейки в пластине с трещиной

Даны постановка и решение нелинейной задачи об образовании шейки при растяжении пластины с трещиной для кусочно-линейной диаграммы деформирования материала. Применением преобразования Фурье и дискретизации уравнений задача сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений. Исследовано влияние нелинейности на распределение глубины шейки и раскрытие трещины возле ее вершины.

**Ключевые слова:** диаграмма деформирования, трещина, нелинейная задача, шейка, дискретизация, глубина шейки, раскрытие трещины.

**Исходные уравнения.** Будем исходить из физически нелинейного закона деформирования материала, описываемого соответственно линейными и нелинейными зависимостями между объемными и девиаторными частями напряжений и деформаций

$$\sigma_{rr} = 3K\varepsilon_{rr}, \quad \sigma'_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\varepsilon'_{ij}, \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (i, j, r = 1, 2, 3), \quad (1)$$

откуда следуют соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon) \left( \frac{\nu(J_\varepsilon)}{1 - 2\nu(J_\varepsilon)} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \quad \nu(J_\varepsilon) = \frac{3K - 2\mu(J_\varepsilon)}{6K + 2\mu(J_\varepsilon)} \quad (i, j, r = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где  $K$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — соответственно модули объемной деформации, сдвига и коэффициент Пуассона.

Примем, что модуль сдвига определяется функцией

$$\mu(J_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}, \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mu_0$ ,  $\mu'$ ,  $k = \sigma_0\sqrt{2/3}$  — постоянные;  $\sigma_0$  — предел текучести материала. Для одноосной деформации при  $\mu' > 0$ ,  $\mu' = 0$ ,  $\mu' < 0$  имеет место соответственно линейное упрочнение, идеальное упруго-пластическое деформирование, линейный ниспадающий участок диаграммы деформирования.

Если ввести замену

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{k\bar{\mu}} \sigma_{ij}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (4)$$

то соотношения (2) примут вид

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu}_0 \left( \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right), \quad \bar{\mu}_0 = \frac{\mu_0}{k} \quad (i, j, r = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Полагая в (5) соответственно  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$  и  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ , находим выражения инварианта  $J_\varepsilon$  для плоского деформированного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} J_{\bar{\sigma}}, \quad J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} [(1 - \nu + \nu^2)(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2 - 3(\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{12}^2)]^{1/2} \quad (6)$$

и для плоского напряженного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} J_{\bar{\sigma}}, \quad J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2)^{1/2}. \quad (7)$$

При этом безразмерный модуль сдвига  $\bar{\mu}$ , согласно (3), (4), (6), (7), определяется формулой

$$\bar{\mu}(J_{\bar{\sigma}}) = 1 - \gamma(J_{\bar{\sigma}}); \quad \gamma(J_{\bar{\sigma}}) = \begin{cases} 0, & J_{\bar{\sigma}} < 1; \\ (1 - \bar{\mu}') \left(1 - \frac{1}{J_{\bar{\sigma}}}\right), & J_{\bar{\sigma}} \geq 1; \end{cases} \quad \left(\bar{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0}\right). \quad (8)$$

Из соотношений (5) следуют выражения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} (\bar{\sigma}_{ij} - \hat{\nu} \bar{\sigma}_{rr} \delta_{ij}) \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (9)$$

где  $\hat{\nu} = \nu$  для плоского деформированного и  $\hat{\nu} = \nu/(1 + \nu)$  — для плоского напряженного состояний. Согласно (2)–(4), (8), коэффициент  $\hat{\nu}$  можно представить в виде суммы  $\hat{\nu} = \hat{\nu}_0 + \hat{\nu}_1$ , где

$$\hat{\nu} = \frac{\nu_0}{1 + \nu_0}, \quad \hat{\nu}_1 = \frac{2}{3} \delta \gamma(J_{\bar{\sigma}}), \quad \nu_0 = \frac{3K - 2\mu_0}{6K + 2\mu_0}, \quad \delta = \frac{1 - 2\nu_0}{2(1 + \nu_0)} \quad (10)$$

для плоского напряженного состояния и

$$\hat{\nu}_0 = \nu_0, \quad \hat{\nu}_1 = \frac{3\delta \gamma(J_{\bar{\sigma}})}{2(1 + \delta)[1 + \delta + \delta \gamma(J_{\bar{\sigma}})]} \quad (11)$$

для плоского деформированного состояния.

В случае плоского напряженного состояния, имеющего место в тонкой пластине под воздействием сил в ее плоскости, в зоне больших напряжений растяжения, превышающих предел текучести, могут появляться остаточные деформации  $\varepsilon_{33}$ , обусловленные эффектом Пуассона, приводящие к образованию шейки. Для описания этого явления необходимо вышеприведенные уравнения состояния дополнить дифференциальными уравнениями равновесия относительно усилий  $s_{ij}$ , действующих в плоскости  $x_1x_2$  на пластину

$$s_{ij,j} = 0; \quad s_{ij,j} = 2h\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (12)$$

где  $2h$  — толщина пластины, зависящая от напряжений, которая, согласно (5), (10), определяется через исходную постоянную толщину  $2h_0$  и напряжения соотношениями

$$2h = 2h_0(1 + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_{33} = -(\hat{\nu}_0 + \hat{\nu}_1) \frac{\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}}{2\bar{\mu}_0}. \quad (13)$$

С учетом (4) уравнения равновесия (12) приводятся к виду

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = 0, \quad \bar{f}_i = \frac{1}{h\bar{\mu}} (h\bar{\mu})_{,j} \bar{\sigma}_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \quad (14)$$

Подставляя (9) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad (15)$$

приходим к уравнению совместности относительно модифицированных напряжений

$$\begin{aligned} [(1 - \widehat{\nu}_0)\overline{\sigma}_{11} - \widehat{\nu}_0\overline{\sigma}_{22}],_{22} + [(1 - \widehat{\nu}_0)\overline{\sigma}_{22} - \widehat{\nu}_0\overline{\sigma}_{11}],_{11} - \overline{f}_{3,rr} &= 2\overline{\sigma}_{12,12}, \\ \overline{f}_3 = \widehat{\nu}_1\overline{\sigma}_{rr} \quad (r = 1, 2). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (14), (16) определяется через функцию напряжений

$$\overline{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}; \quad \overline{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}; \quad \overline{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (17)$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,iijj} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (18)$$

Частное решение неоднородных уравнений (14), (16), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [1], представляется через интегралы по области  $D$  тела

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_{11}^* &= -\frac{1}{4\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_i - \xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j)\overline{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1 - 2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)e_{ij}(x_i - \xi_i)\overline{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} \overline{f}_3(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\ \overline{\sigma}_{22}^* &= -\frac{1}{4\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_j - \xi_j)\overline{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j)\overline{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+ \frac{1 - 2\widehat{\nu}_0}{2\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i)\overline{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &- \frac{1}{2\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} \overline{f}_3(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\ \overline{\sigma}_{12}^* &= -\frac{1 - 2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i)\overline{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{1}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \bar{f}_3(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2),
\end{aligned}$$

где  $e_{11} = e_{22} = 0$ ,  $e_{12} = -e_{21} = 1$ . Постоянные интегрирования определяются из граничных условий для общего решения  $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij}^*$ , состоящего из суммы (17), (19). Таким образом приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{12}$ .

**Растяжение пластины с трещиной.** Рассмотрим плоское напряженное состояние пластины с внутренней трещиной ( $-c \leq x \leq c, y = 0$ ) при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной растягивающей нагрузке  $p_0$ , действующей вдоль оси  $y$ . Так как распределение напряжений имеет симметрию относительно осей  $x$  и  $y$ , то достаточно ограничиться рассмотрением первого квадранта  $D_1$  области тела  $D$ . При этом необходимо учесть влияние остальных квадрантов  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  при построении частного решения (19). Тогда приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} \{ [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) + P_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta) \} d\xi d\eta; \\
\bar{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} \{ [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) - P_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta) \} d\xi d\eta; \quad (20) \\
\bar{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} [S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) + S_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2),
\end{aligned}$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned}
P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\
P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \left( \frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right); \\
P_3(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \left( \frac{\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1 - 2\hat{\nu}_0}{2\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \left( \frac{\alpha_1 \alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2 \alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2 \alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1 \alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_1 \gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1 \gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1 - 2\hat{\nu}_0}{2\pi(1 - \hat{\nu}_0)} \left( -\frac{\alpha_1^2 \alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2 \alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2 \alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2 \alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\alpha_3 \gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3 \gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4 \gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4 \gamma_4}{\beta_4^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1 - 2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \left( -\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\
S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1 - 2\widehat{\nu}_0}{4\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \left( \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right); \\
S_3(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{\pi(1 - \widehat{\nu}_0)} \left( \frac{\alpha_1\alpha_3}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\
\alpha_1 &= x - \xi, \quad \alpha_2 = x + \xi, \quad \alpha_3 = y - \eta, \quad \alpha_4 = y + \eta; \\
\beta_1 &= \alpha_1^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad \beta_3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^2, \quad \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2, \\
\gamma_1 &= \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \quad \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2, \quad \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.
\end{aligned} \tag{21}$$

Нагрузку  $p_0$  принимаем меньшей предела текучести  $k$ , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (4), (8), выполняются граничные условия  $\bar{\sigma}_{22}|_{22} = \bar{p}_0$ ,  $\bar{\sigma}_{11}|_{\infty} = \bar{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$ , где  $\bar{p}_0 = p_0/k$ . На оси  $y = 0$  граничные условия формулируются в виде  $\bar{\sigma}_{22}(x, 0) = 0$  для  $|x| \leq c$ ,  $u_2(x, 0) = 0$  для  $|x| \geq c$ ,  $\bar{\sigma}_{12}(x, 0) = 0$  для  $0 \leq |x| < \infty$ , где  $u_2(x, 0)$  — перемещение вдоль оси  $y$ .

На основе преобразования Фурье [1] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu}_0)k} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0) d\eta, \\
\bar{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu}_0)k} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)]u_2(\eta, 0) d\eta, \\
\bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu}_0)k} \int_0^c R_3(x, y, \eta)u_2(\eta, 0) d\eta,
\end{aligned} \tag{22}$$

где функция  $u_2(\eta, 0)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \widehat{\nu}_0)k} \int_0^c R(x, \eta)u_2(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c, \tag{23}$$

а ядра определяются формулами

$$R(x, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{x + \eta} - \frac{1}{x - \eta} \right),$$

$$\begin{aligned}
R_1(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{x + \eta}{(x + \eta)^2 + y^2} - \frac{x - \eta}{(x - \eta)^2 + y^2} \right], \\
R_2(x, y, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x + \eta)}{[(x + \eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x - \eta)}{[(x - \eta)^2 + y^2]^2} \right\}, \\
R_3(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x + \eta)^2 - y^2}{[(x + \eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x - \eta)^2 - y^2}{[(x - \eta)^2 + y^2]^2} \right\}
\end{aligned} \tag{24}$$

Если ввести безразмерное перемещение

$$\bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)kc}, \tag{25}$$

то соотношения (22) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \\
\bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \\
\bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - cy \int_0^c R_3(x, y, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta,
\end{aligned} \tag{26}$$

где функция  $\bar{u}(\eta, 0)$ , как следует из (23), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c. \tag{27}$$

**Дискретизация задачи.** Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (20), (26), (27) можно осуществить только численными методами, для чего необходимо их преобразовать из континуальной в дискретную форму. Для этого разобьем интервал  $(0, c)$  на  $N$  частей, представив интеграл в (27) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta, \quad \left( \sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \tag{28}$$

Аналогичное разбиение проводим по координате  $y$  с шагом  $2b_n$ . Тогда, вводя безразмерные координаты и величины

$$\begin{aligned}
\bar{x}_i &= \frac{x_i}{c}; & \bar{y}_j &= \frac{y_j}{c}, & \bar{x}_k &= \frac{x_k}{c}; & \bar{y}_n &= \frac{y_n}{c}; & \bar{a}_k &= \frac{a_k}{c}, & \bar{b}_n &= \frac{b_n}{c} \\
(i, j &= 0, 1, \dots; k, n = 1, 2, \dots)
\end{aligned} \tag{29}$$

и принимая равномерное разбиение области  $D_1$  с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей

$$\bar{a}_k = \bar{b}_n = a = \frac{1}{2N}, \tag{30}$$

приведем интегральное уравнение (27) к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (31)$$

а соотношения (24), (26) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N I_{ijk}^{(3)} \bar{u}(x_k, 0). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь матрицы  $I_{ik}$ ,  $I_{ijk}^{(1)}$ ,  $I_{ijk}^{(2)}$ ,  $I_{ijk}^{(3)}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} I_{ik} &= -\frac{1}{a} \left[ \frac{1}{4(i-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} \right], \\ I_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2a} \left( \frac{s_1}{s_1^2 + s_5^2} - \frac{s_2}{s_2^2 + s_5^2} + \frac{s_3}{s_3^2 + s_5^2} - \frac{s_4}{s_4^2 + s_5^2} \right), \\ I_{ijk}^{(2)} &= \frac{s_5^2}{a} \left[ \frac{s_1}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right], \\ I_{ijk}^{(3)} &= \frac{s_5}{2a} \left[ \frac{s_1^2 - s_5^2}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2^2 - s_5^2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3^2 - s_5^2}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4^2 - s_5^2}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right]; \\ s_1 &= 2(i+k) - 1, \quad s_2 = 2(i+k) - 3, \quad s_3 = 2(i-k) + 1, \\ s_4 &= 2(i-k) - 1, \quad s_5 = 2j - 1 \quad (i, k = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (33)$$

Частное решение (20) с учетом (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \bar{P}_3(i, j; k, n) g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) - \bar{P}_3(i, j; k, n) g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \bar{S}_r(i, j; k, n) g_r(k, n) + \bar{S}_3(i, j; k, n) g_3(k, n) \quad (r = 1, 2), \end{aligned} \quad (34)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_3} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_4} \right); \\
\bar{P}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1} + \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4} \right); \\
\bar{P}_3(i, j; k, n) &= \frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) \\
\bar{Q}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{Q}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( -\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( -\frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_3(i, j; k, n) &= \frac{1}{\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left( \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{\alpha}_1 &= i - k, \quad \bar{\alpha}_2 = i + k - 1, \quad \bar{\alpha}_3 = j - n, \quad \bar{\alpha}_4 = j + n - 1, \\
\bar{\beta}_1 &= \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\beta}_3 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_4^2, \quad \bar{\beta}_4 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_4^2, \\
\bar{\gamma}_1 &= \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_4^2, \quad \bar{\gamma}_4 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_4^2, \\
g_r(k, n) &= \bar{\sigma}_{r1}(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \left[ \frac{h(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n)\bar{\mu}(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n)}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n)\bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right] + \\
&\quad + \bar{\sigma}_{r2}(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \left[ \frac{h(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1})\bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1})}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n)\bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right], \\
g_3(k, n) &= \bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \quad (r = 1, 2).
\end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, при равномерном разбиении области  $D_1$  на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (31), (32), (34) относи-

тельно переменных  $\bar{u}(\bar{x}_k, 0)$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^*(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$ , где коэффициенты определяются формулами (33), (35), а безразмерный модуль сдвига  $\bar{\mu}$  связан с напряжениями  $\bar{\sigma}_{ij}$  зависимостями (7), (8). Полученную систему можно упростить, исключив переменные  $\bar{u}(\bar{x}_k, 0)$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^*(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$ . Для этого представим уравнения (31) в виде

$$\bar{u}(\bar{x}_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik}^{-1} [\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(\bar{x}_k, 0)] \quad (i = 1, \dots, N), \quad (36)$$

где  $I_{ik}^{-1}$  — матрица, обратная к  $I_{ik}$ , и воспользуемся представлением

$$\bar{\sigma}_{22}^*(\bar{x}_i, 0) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \bar{P}_r \left( i, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left( i, \frac{1}{2}; k, n \right) \right] \bar{g}_r(k, n) - \bar{P}_3 \left( i, \frac{1}{2}; k, n \right) \bar{g}_3(k, n) \right\}, \quad (37)$$

вытекающим из (34), (35). Тогда из (32), (34), (36), (37) следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\bar{p}_0 T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n) - \\ &\quad - E_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + [\bar{P}_3(i, j; k, n) + E_3(i, j; k, n)] g_3(k, n); \\ \bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \bar{p}_0 [1 - T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)] + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n) - \\ &\quad - L_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + [-\bar{P}_3(i, j; k, n) + L_3(i, j; k, n)] g_3(k, n); \\ \bar{\sigma}_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\bar{p}_0 T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{S}_r(i, j; k, n) - M_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \\ &\quad + [\bar{S}_3(i, j; k, n) + M_3(i, j; k, n)] g_3(k, n) \quad (r = 1, 2), \end{aligned} \quad (38)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}; & T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}; \\ T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \sum_{k,n=1}^N I_{ijk}^{(3)} I_{kn}^{-1}; \\ E_r(i, j; k, n) &= \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[ \bar{P}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) \right]; \\ L_r(i, j; k, n) &= \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[ \bar{P}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) \right]; \\ M_r(i, j; k, n) &= \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \left[ \bar{P}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right) \right]; \end{aligned} \quad (39)$$

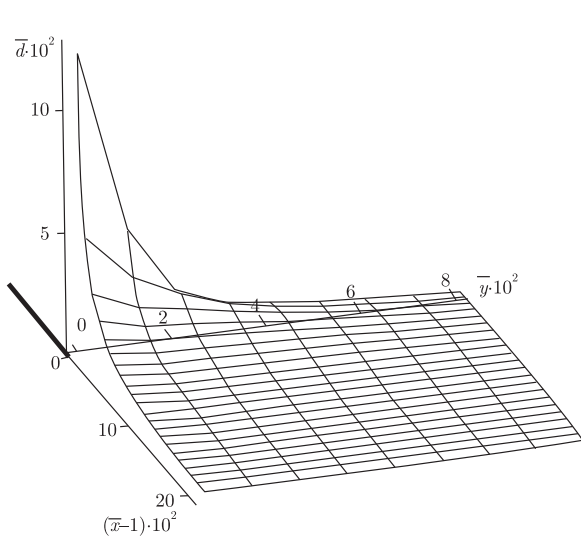


Рис. 1

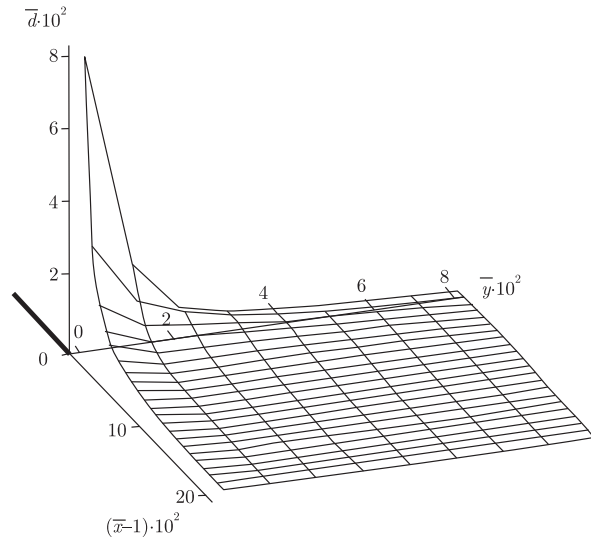


Рис. 2

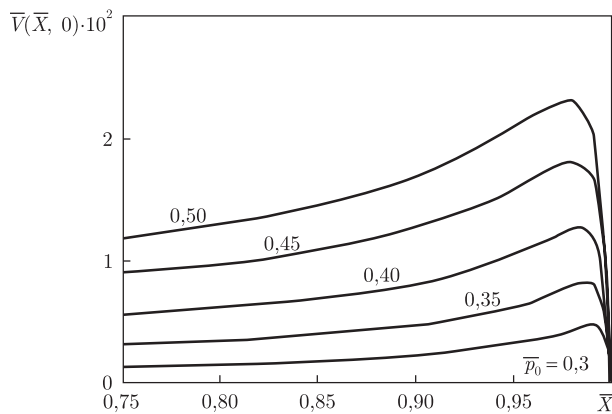


Рис. 3

$$E_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \bar{P}_3 \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right);$$

$$L_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \bar{P}_3 \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right);$$

$$M_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \bar{P}_3 \left( q, \frac{1}{2}; k, n \right).$$

Следует отметить, что в уравнениях (38) суммирование распространяется только на область нелинейного деформирования материала, где  $g_r(k, n) \neq 0$ ,  $g_3(k, n) \neq 0$ . При этом слагаемые  $-\bar{p}_0 T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ ,  $\bar{p}_0 [1 - T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)]$ ,  $-\bar{p}_0 T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ , представляют собой решение линейной задачи для случая  $\bar{\mu} = 1$ .

Численное решение задачи проведено для пластины из дюралюминия [2] с постоянными  $K = 61400$  МПа,  $\mu_0 = 26720$  МПа,  $\sigma_0 = 330$  МПа. Половина длины трещины разбивалась на

$N = 200$  частей. Для покрытия области нелинейного деформирования используется  $30 \times 24$  квадратных ячеек, что приводит к решению системы 2160 нелинейных алгебраических уравнений (30) относительно 2160 неизвестных  $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}$ . На рис. 1, 2 представлены зависимости глубины шейки  $\bar{d} = 1 - h/h_0$  соответственно при приложенной нагрузке  $\bar{p}_0 = 0,5$  и после ее снятия, т. е. остаточной глубины шейки. Здесь черной линией изображена вершина трещины. На рис. 3 приведены, согласно (25), кривые остаточного раскрытия трещины  $\bar{v}(\bar{x}, 0) = \bar{u}(\bar{x}, 0) - \bar{u}_0(\bar{x}, 0)$  для нагрузок  $\bar{p}_0 = 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5$ , где  $\bar{u}_0(\bar{x}, 0)$  — линейно-упругое перемещение берега трещины. Как видим, кривые имеют максимум у вершины трещины, который удаляется от вершины с увеличением нагрузки. Следует отметить, что зоны пластических деформаций и кривые зависимостей нормальных напряжений  $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$  от координаты  $\bar{x}$  практически не зависят от образования шейки и имеют вид, приведенный в [3, 4].

## Цитированная литература

1. *Sneddon J. N., Berry D. S.* The classical theory of elasticity. – Berlin: Springer, 1958. – 219 p.
2. *Гуляев А. П.* Металловедение. – Москва: Металлургия, 1986. – 542 с.
3. *Khoroshun L. P.* Discretization of the plane problem for a cracked body with nonlinear stress-strain diagram under tension // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No 11. – P. 1238–1252.
4. *Khoroshun L. P., Levchuk O. I.* Distribution around cracks in linear hardening materials subject to tension: plane problem // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, No 2. – P. 128–140.

## References

1. *Sneddon J. N., Berry D. S.* The classical theory of elasticity, Berlin: Springer, 1958.
2. *Gulyaev A. P.* Metal science, Moscow: Metallurgy, 1986 (in Russian).
3. *Khoroshun L. P.* *Int. Appl. Mech.*, 2010, **46**, No 11: 1238–1252.
4. *Khoroshun L. P., Levchuk O. I.* *Int. Appl. Mech.*, 2014, **50**, No 2: 128–140.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 24.12.2014*

Член-корреспондент НАН України **Л. П. Хорошун**

## Плоска задача про утворення шийки в пластині з тріщиною

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

*Дано постановку і розв'язок нелінійної задачі про утворення шийки при розтягу пластини з тріщиною для кусково-лінійної діаграми деформування матеріалу. Застосуванням перетворення Фур'є та дискретизації рівнянь задачу зведено до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено вплив нелінійності на розподіл глибини шийки і розкриття тріщини біля її вершини.*

**Ключові слова:** діаграма деформування, тріщина, нелінійна задача, шийка, дискретизація, глибина шийки, розкриття тріщини.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **L. P. Khoroshun**

## **The plane problem of formation of a neck in the cracked plate**

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kiev

*The formulation and the solution of the nonlinear problem of formation of a neck in the cracked plate under tension for the piecewise linear diagram of deformation of a material are considered. With the application of the Fourier transformation and the discretization of equations, the problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations. The influence of a nonlinearity on the crack opening at the top and on the neck depth distribution is investigated.*

**Keywords:** diagram of deformation, nonlinear problem, neck, discretization, depth of neck, crack opening.