УДК 539.3

Б. М. Калиняк

Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Г. С. Кітом)

Запропоновано метод визначення температурного поля та термомеханічних характеристик, які забезпечують нульові радіальні напруження по товщині довгого порожнистого неоднорідного вздовж радіуса циліндра. Розв'язування відповідної некласичної незв'язаної стаціонарної задачі термопружності зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно температури. Отримано точні аналітичні вирази для температурного поля та концентрації однієї зі складових двокомпонентного функціонально-градієнтного матеріалу, які в рамках моделі простої суміші характеристик матеріалу забезпечують нульові радіальні та колові напруження при відсутності масових сил і осьового навантаження. Проведено розрахунки відповідних температурних полів та термомеханічних характеристик для реально існуючого матеріалу.

Ключові слова: термопружність, функціонально-градієнтні матеріали, обернена задача, термомеханічні характеристики матеріалів, порожнистий циліндр, відсутність напружень, інтегральні рівняння, точні розв'язки.

Сучасні технології дозволяють виготовляти матеріали з заданими характеристиками для продовження терміну експлуатації виробів у специфічних умовах при теплових та силових навантаженнях. Це, зокрема, композити та функціонально градієнтні матеріали, які виготовляються з ефективними характеристиками для забезпечення міцності конструкцій [1–3].

Тому виникає проблема підбору такого температурного поля при заданій залежності характеристик матеріалу від координати, яке б мінімізувало або забезпечувало відсутність однієї із складових напружень або переміщень. Не менш актуальною задачею є підбір таких характеристик неоднорідного матеріалу, який би забезпечував відсутність переміщень або напружень при заданих теплових і, можливо, силових навантаженнях. Задача визначення умов відсутності температурних напружень в оболонках розв'язана в роботі [4].

У нашій роботі пропонується спосіб визначення температурних полів та характеристик матеріалу у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі, виготовленому з двокомпонентного функціонально градієнтного матеріалу, шляхом зведення відповідної оберненої задачі некласичної стаціонарної незв'язаної задачі термопружності до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно однієї з компонент тензора напружень. Обернені задачі термопружності виникають також і при розв'язуванні задач ідентифікації термопружних полів при неповній інформації про теплові навантаження на поверхнях або задач оптимального за швидкодією нагрівання при обмеженнях на напруження або температуру [5, 6].

Постановка задачі. Розглянемо довгий неоднорідний вздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з внутрішнім R_1 та зовнішнім R_2 радіусами. Циліндр знаходиться під дією залежного від радільної координати температурного поля $T(r)$, яке може бути визначене експериментально або як розв'язок відповідної задачі теплопровідності, та рівномірно розподілених силових навантажень на внутрішній p_1 та зовнішній p_2 поверхнях. Осьові деформації вважаються сталими ($e_z = \mathrm{const}$). Завданням є визначити стаціонарне температурне поле, яке забезпечує нульові компоненти напруження при відомих характеристиках матеріалу, та характеристики матеріалу, які б зумовили рівність нулю однієї або декількох компонент тензора напружень при заданому стаціонарному тепловому навантаженні.

Математично проблема зводиться до розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь незв'язаної термопружності (температурне поле визначається з рівнянь теплопровідності). Відповідні рівняння зі змінними коефіцієнтами і умови на межах мають вигляд [7]:

рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_r) = \rho\sigma + \rho^2 F, \tag{1}$$

зв'язки між деформаціями і напруженнями

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_r - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T), \\ e_\varphi &= -\frac{1+\nu}{E}\sigma_r + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T), \\ e_z &= \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma + \Phi(T), \end{aligned} \tag{2}$$

рівняння суцільності у напруженнях

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\nu^2}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\alpha T\right] = \sigma_r \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) + \frac{1+\nu}{E}\rho F, \tag{3}$$

умови на межах

$$\sigma_r(\rho_1) = -p_1, \qquad \sigma_r(1) = -p_2, \qquad \int\limits_{\rho_1}^{1} \eta\sigma_z(\eta)\,d\eta = \int\limits_{\rho_1}^{1} \eta[e_z^E + \nu\sigma - E\Phi(T)]d\eta = p. \tag{4}$$

У рівняннях та виразах (1)–(4) $\rho = r/R_2$ — радіальна координата; $\sigma = \sigma_r^+\sigma_\varphi$ — сумарні напруження; $E(\rho)$ — модуль пружності матеріалу; $\nu(\rho)$ — коефіцієнт Пуассона; $F(\rho)$ — густина масових сил; $\Phi(\rho) = \alpha_t(\rho)[T(\rho) - T_0]$; $T(\rho)$ — задане температурне поле; $\alpha_t(\rho)$ — коефіцієнт лінійного температурного розширення; T_0 — відлікова температура, при якій за відсутності деформацій напруження дорівнюють нулю; p_1, p_2, p — відомі навантаження.

Отже задача полягає у визначенні змінних коефіцієнтів диференціального рівняння, якщо відомий його розв'язок і умови на межах. Оскільки потрібна також перевірка отриманих результатів, то запропоновано згадані дві задачі (пряму і обернену) звести до єдиного інтегрального рівняння відносно однієї зі змінних (наприклад, радіальних напружень) і трактувати його як рівняння відносно характеристик матеріалу, напружень, температурного поля залежно від постановки задачі, а також використовувати його для перевірки отриманих результатів.

Зведення розв'язування задачі до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма відносно радіальних напружень. Якщо диференціальні рівняння рівноваги (1) та сумісності (3) проінтегрувати за радіальною змінною, виключити з них сумарні напруження, використати умови на межах, інтегральну умову (4) і зв'язки між деформаціями та напруженнями (3), то відповідну задачу термопружності (1)–(4) можна звести до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напруження $\sigma_r(\rho)$ [7]:

$$\sigma_r(\rho) + \int\limits_{\rho_1}^{1} K(\rho,\eta)\sigma_r(\eta)\,d\eta = Q(\rho), \tag{5}$$

де

$$K(\rho,\eta) = \begin{cases} K_1(\rho,\eta), \eta < \rho, \\ K_2(\rho,\eta), \eta > \rho, \end{cases}$$

$$K_1(\rho,\eta) = \frac{1}{\rho^2}[V(\eta) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$K_2(\rho,\eta) = \frac{1}{\rho^2}[V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)]\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right),$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(1)V(\rho) - W(1)W(\rho)}{[V^2(1) - W^2(1)]}, \qquad Z_2(\rho) = \frac{W(1)V(\rho) - V(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2}\frac{d_1^V(1) - d_2^W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2}\frac{d_2^V(1) - d_1^W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho),$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{E\eta}{1-\nu^2}(1+\nu)\Phi(T(\eta))\,d\eta - \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}[V(\rho) - V(\eta)]\frac{1+\nu}{E}\eta F d\eta - \tag{6}$$

$$-\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta^2 F d\eta - \frac{1}{\rho^2}\rho_1^2 p_1,$$

$$V(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E}{1-\nu^2}d\eta, \qquad W(\rho) = \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E\nu}{1-\nu^2}d\eta, \qquad d_1 = -p_2 - f(1),$$

$$d_2 = p + \int\limits_{\rho_1}^{1}\eta E\Phi(T)d\eta + \int\limits_{\rho_1}^{1}[W(1) - W(\eta)]\frac{1+\nu}{E}\eta F d\eta + \int\limits_{\rho_1}^{1}\frac{\eta E\nu}{1-\nu^2}(1+\nu)\Phi(T)\,d\eta.$$

Як випливає з (6), ядро інтегрального рівняння (5) є неперервним. Інтегральне рівняння (5) є рівнянням Фредгольма другого роду і дозволяє визначити радіальні напруження з урахуванням умов на поверхнях. Тоді сумарні напруження можна визначити з рівняння, отриманого інтегруванням рівняння суцільності (3) з урахуванням умов на межах (4) [7]:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\sigma_r\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)d\eta + A\frac{E}{1-\nu^2} + e_z\frac{E}{1-\nu^2}\nu - \frac{E}{1-\nu^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\frac{1+\nu}{E}F\,d\eta -$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}(1+\nu)\Phi(T),$$

де

$$A = \frac{d_1V(1) - d_2W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int\limits_{\rho_1}^{1} \sigma_r(\eta) \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left\{1 - \frac{V(1)V(\eta) - W(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)}\right\} d\eta,$$

$$e_z = \frac{d_2V(1) - d_1W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int\limits_{\rho_1}^{1} \sigma_r(\eta) \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\frac{W(1)V(\eta) - V(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)} d\eta,$$

колові напруження — з формули $\sigma_\varphi(\rho) = \sigma(\rho) - \sigma_r(\rho)$, деформації — з формул (2), радіальне переміщення — з виразу Коші для деформацій та переміщень у циліндричній системі координат $u_r(\rho) = \rho e_\varphi$. Тут $u_r(\rho) = \overline{u}_r(\rho R_2)/R_2$ — переміщення розмірності зовнішнього радіуса; $\overline{u}_r(r) = \overline{u}_r(\rho R_2)$ — переміщення, осьові напруження — зі зв'язків між деформаціями та напруженнями (2) при використанні формул (7).

Умова рівності нулю радіальних напружень — це рівність правої сторони нулю інтегрального рівняння, тобто $Q(\rho) = 0$. Припустимо, що масові сили відсутні, тоді

$$\frac{1}{\rho^2[V^2(1) - W^2(1)]}\{V(\rho)[d_1^V(1) - d_2^W(1)] + W(\rho)[d_2^V(1) - d_1^W(1)]\} + f(\rho) = 0. \tag{7}$$

Якщо використати вирази для $V(\rho)$ і $W(\rho)$ (6), то з (7) отримаємо таке інтегральне рівняння, яке зв'язує температурне поле, навантаження і фізико-механічні характеристики матеріалу:

$$(1+\nu(\rho))\Phi(T(\rho)) - \frac{(1+\nu(\rho))}{V(1)+W(1)} \int\limits_{\rho_1}^{1} \frac{dV(\eta)}{d\eta}(1+\nu(\eta))\Phi(T(\eta))d\eta =$$

$$= -p\frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}. \tag{8}$$

Це рівняння є необхідною умовою існування нульових радіальних напружень у неоднорідному порожнистому циліндрі. Його розв'язком, як рівняння з виродженим ядром і власним значенням ядра, є [8]:

$$(1+\nu(\rho))\Phi(T(\rho)) = \widetilde{C}\frac{(1+\nu(\rho))}{V(1)+W(1)} - p\frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

звідки

$$T(\rho) = \widetilde{C}\frac{1}{\alpha(\rho)[V(1)+W(1)]} - p\frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[V^2(1) - W^2(1)](1+\nu(\rho))} + T_0. \tag{9}$$

У випадку $p = 0$ або $\nu(\rho) = \text{const}$ вираз для температури (9) спрощується

$$T(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} + T_0, \tag{10}$$

де $C = \widetilde{C}/[V(1)+W(1)]$. Вирази (9) і (10) є умовами рівності нулю радіальних напружень.

Стаціонарні температурні поля, які приводять до відсутності радіальних напружень. Розподіли температури (9) або (10) повинні бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dT(\rho)}{d\rho}\right) + q_v(\rho) = 0 \tag{11}$$

з класичними умовами на поверхнях $\rho = \rho_1$ і $\rho = 1$

$$\begin{aligned} &\lambda(\rho_1)\frac{dT(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1[T(\rho_1) - T_1] = 0,\\ &\lambda(1)\frac{dT(1)}{d\rho} + \beta_2[T(1) - T_2] = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де β_1, β_2 — коефіцієнти теплоообміну з середовищами, які мають температури T_1, T_2 відповідно. З рівностей (12) і (10) бачимо, що умови на поверхнях циліндра повинні бути залежними, оскільки

$$-\lambda(\rho_1)\frac{C}{\alpha(\rho_1)^2}\frac{d\alpha(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1\frac{C}{\alpha(\rho_1)} = \beta_1 T_1 - \beta_1 T_0,$$

$$-\lambda(1)\frac{C}{\alpha(1)^2}\frac{d\alpha(1)}{d\rho} + \beta_2\frac{C}{\alpha(1)} = \beta_2 T_2 - \beta_2 T_0. \tag{13}$$

Між ними повинен бути такий зв'язок:

$$\lambda(\rho_1)\frac{dT(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1[T(\rho_1) - T_1] = \lambda(1)\frac{dT(1)}{d\rho} + \beta_2[T(1) - T_2],$$

або, з урахуванням виразів (13),

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{1}{\alpha(1)} - \frac{\lambda(1)}{\beta_2\alpha^2(1)}\frac{d\alpha(1)}{d\rho}\right]\left[\frac{1}{\alpha(\rho_1)} - \frac{\lambda(\rho_1)}{\beta_1\alpha^2(\rho_1)}\frac{d\alpha(\rho_1)}{d\rho}\right]^{-1}. \tag{14}$$

Аналогічні виразу (14) простіші формули можна записати для умов першого і другого роду на межах. Якщо вираз для температури (10) підставити в (11), то для теплових джерел, які забезпечують потрібне температурне поле, отримаємо вираз

$$q_v(\rho) = -C\frac{\lambda(\rho)}{\alpha^2(\rho)}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} - 2\left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right)^2\frac{1}{\alpha(\rho)} + \frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2}\right] - C\frac{1}{\alpha^2(\rho)}\frac{d\lambda(\rho)}{d\rho}\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}. \tag{15}$$

Характеристики матеріалів, які забезпечують нульові радіальні напруження при заданих умовах теплообміну з поверхонь. Важливим є випадок відсутності об'ємних теплових джерел, оскільки їх створення пов'язано з практичними технічними труднощами. Отже, у випадку рівності нулюі інтенсивності теплових джерел з виразу (15) матимемо диференціальне рівняння, яке пов'язує питому теплоємність та коефіцєнт лінійного температурного розширення, тобто зв'язок між характеристиками матеріалів, які забезпечують нулю радіальні напруження:

$$\frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} + \lambda(\rho)\left[\frac{1}{\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}}\frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2} - 2\left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right)\frac{1}{\alpha(\rho)} + \frac{1}{\rho}\right] = 0. \tag{16}$$

Воно має точні розв'язки відносно $\lambda(\rho)$, $\alpha(\rho)$:

$$\lambda(\rho) = \lambda(\rho_1) \exp\left(-\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \psi(\eta)\, d\eta\right), \tag{17}$$

$$\alpha(\rho) = -\frac{1}{2} \ln\left(-2C_1 \int \frac{1}{\rho\lambda(\rho)} d\rho - 2C_2\right), \tag{18}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі,

$$\psi(\rho) = \frac{d}{d\rho} \ln\left\{\frac{1}{[\alpha(\rho)]^2} \frac{d\alpha(\rho)}{d\rho}\right\} + \frac{1}{\rho}. \tag{19}$$

Оскільки проблема створення матеріалу з довільними наперед заданими механічними і теплофізичними характеристиками, взагалі кажучи, не вирішена, то скористаємося найпростішою моделлю характеристик двокомпонентного матеріалу Фойгта, яка дозволяє виразити характеристики двокомпонентного матеріалу через характеристики його складових [9]:

$$D(\rho) = D_1 S_1(\rho) + D_2 S_2(\rho), \tag{20}$$

де D_1, D_2 — характеристики складових матеріалу; $S_1(\rho)$ — концентрація першого матеріалу в другому; $S_2(\rho)$ — концентрація другого матеріалу в першому, $S_1(\rho) + S_2(\rho) = 1$. Якщо врахувати, що від концентрації матеріалів у двокомпонентному ФГМ залежать як температура, так і напруження, то умова рівності нулю радіальних напружень, яка повинна бути одночасно і розв'язком рівняння теплопровідності, приводить до такого рівняння відносно концентрації матеріалу:

$$C_1 \int\limits_{\rho_1}^{\rho} \frac{d\eta}{\eta[\lambda_2 + (\lambda_1^{-}\lambda_2) S_1(\eta)]} + C_2 = \frac{C}{\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) S_1(\rho)} + T_0. \tag{21}$$

Розв'язком інтегрального рівняння (21) після його диференціювання з наступним розв'язуванням отриманого відповідного нелінійного диференціального рівняння першого порядку є

$$S_1(\rho) = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 - \alpha_2 W_L(z)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2) W_L(z)}, \qquad z = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)\rho^{\alpha_\lambda} e^{B\alpha_\lambda}}{(\lambda_1 - \lambda_2)}, \tag{22}$$

де $\alpha_\lambda = B(\alpha_1 - \alpha_2)^2/(\lambda_1 - \lambda_2)$; $B = C_1/(C(\alpha_1^{-}\alpha_2))$; B — довільна стала; $W_L(z)$ — W-функція Лямберта [10].

Приклади. Розглянемо двокомпонентний циліндр при відсутності масових сил і поздовжніх навантажень ($p = 0$), виготовлений з функціонально-градієнтного матеріалу з таким характеристиками його складових (кераміка з індексом c і сталь з індексом m): $\nu_m = 0{,}32$, $\nu_c = \nu_1 = 0{,}24$, $\lambda_c = \lambda_1 = 10{,}12$ Вт/(мК), $\lambda_m = \lambda_2 = 12{,}14$ Вт/(мК), $E_c = E_1 = 3{,}22 \cdot 10^{11}$ Па, $E_m = E_2 = 3{,}2 \cdot 10^{11}$ Па, $\alpha_m = 15{,}32 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $\alpha_c = 7{,}47 \cdot 10^{-6}$ 1/К. Температура, при якій напруження відсутні, $-T_0 = 300$ К.

1. Нехай характеристики описуються формулою (20) з $S_1(\rho) = ((\rho - \rho_1)/(1 - \rho_1))^s$, де s — стала, яка набуває значень $s = s_i$, $i = \overline{1,3}$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$. Тоді відповідне температурне поле та теплові джерела, обчислені за формулами (10), (15), які задовольняють

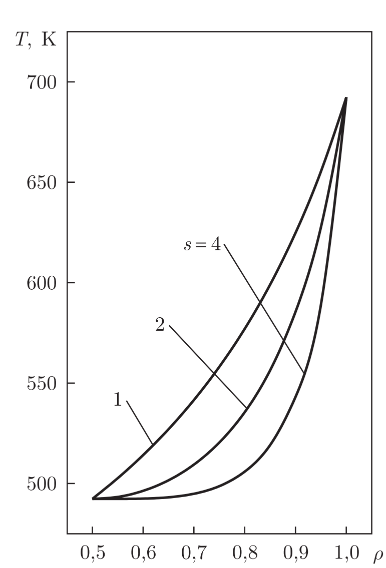

Рис. 1

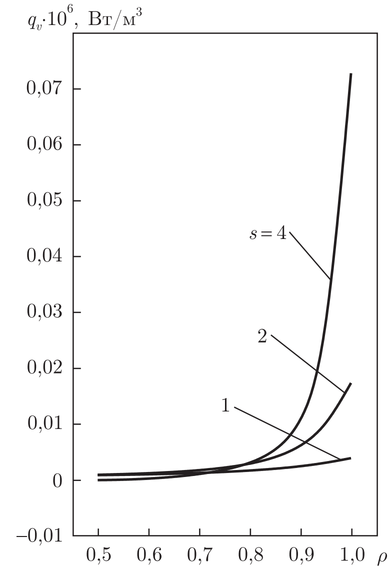

Рис. 2

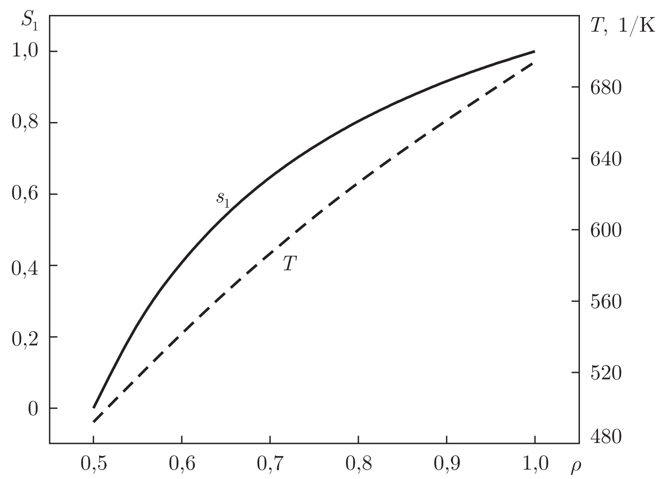

Рис. 3

рівняння теплопровідності (11) з заданими температурами на поверхнях, що відповідають перепаду температур 200 K між поверхнями і приводять до нульових радіальних напружень, зображені на рис. 1, 2.

2. Вважаємо, що концентрація $S_1(\rho)$ невідома. Задамо її значення на межах циліндра $S_1(\rho_1) = 1$, $S_1(1) = 0$. Оскільки вона також впливає на коефіцієнт теплопровідності, а відповідне температурне поле повинно задовольняти однорідне рівняння стаціонарної теплопровідності з заданими температурами на поверхні, то використання формул (21) дає залежності концентрації та температури від радіальної змінної (рис. 3). Використання формули (20) дозволяє обчислити характеристики матеріалу. Результати відповідних значень коефіцієнтів теплопровідності та теплового лінійного розширення зображені на рис. 4.

Таким чином, зведення задачі термопружності до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно однієї з компонент тензора напружень дозволило

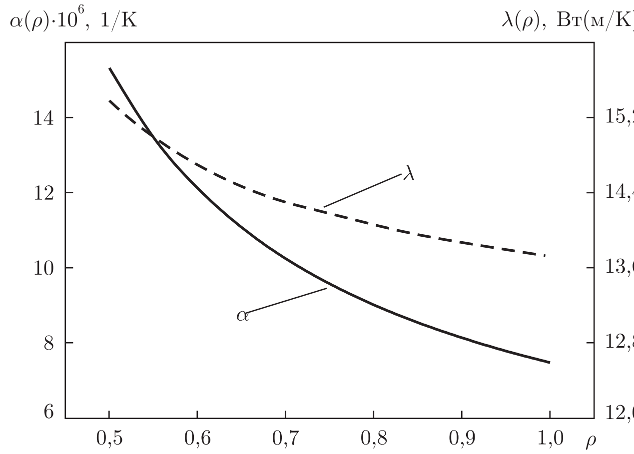

Рис. 4

використовувати одні і ті ж запропоновані інтегральні рівняння для розв'язання прямих задач визначення термонапруженого стану порожнистого неоднорідного циліндра і обернених задач керування напруженнями підбором теплових джерел або характеристиками матеріалу неоднорідних тіл;

отримати точний аналітичний вираз, який пов'язує навантаження, температурне поле, характеристики матеріалу так, що забезпечують нульові радіальні напруження у циліндрі;

отримати точні аналітичні вирази для розподілу температури, концентрації, характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі в реально існуючому матеріалі;

як наслідок, одночасно забезпечити нульові колові напруження при відсутності масових сил на основі виконання рівняння рівноваги.

Запропонований підхід дозволяє також підбирати неоднорідність характеристик матеріалу для забезпечення нульових напружень і у випадку різних типів умов для температури на поверхнях порожнистого циліндра.

Цитована література

1. *Abrinia K., Naee H., Sadeghi F., Djavanroodi F.* New analysis for the FGM thick cylinders under combined pressure and temperature loading // Amer. J. Appl. Sci. – 2008. – **5**, No 7. – P. 852–859.
2. *Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.* Functionally graded materials: a critical review // Intern. J. Research (IJR). – 2014. – **1**, No 7. – P. 289–301.
3. *Functionally* graded materials in the 21 st cent.: a workshop on trends and forecasts / Ed. by Kiyoshi Ichikawa. – 2001. – Vol. 16. – 242 p.
4. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
5. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
6. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. И. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.).
7. *Калиняк Б. М.* Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 141–147.
8. *Kanwal R. P.* Linear integral equations: theory and technique. – New York: Academic Press. – 1971. – 298 p.

9. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.
10. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert *W* function // Advances in Comput. Math. – 1996. – **5**. – P. 329–359.

References

1. *Abrinia K., Naee H., Sadeghi F., Djavanroodi F.* Amer. J. oAppl. Sci., 2008, **5**, No 7: 852–859.
2. *Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.* Intern. J. Research (IJR), 2014, **1**, No 7: 289–301.
3. *Functionally* graded materials in the 21 st cent.: a workshop on trends and forecasts, ed. by Kiyoshi Ichikawa, 2001, **16**.
4. *Pidstryhach Ya. S.* Selected works, Kiev: Naukova Dumka, 1995 (in Ukrainian).
5. *Vihak V. M.* Optimal control of thermal stresses and displacements, Kiev: Naukova Dumka, 1988 (in Russian).
6. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Yasinskyy A. V.* Optimization and identification in thermo-mechanics of inhomogeneous bodies, L'viv: SPOLOM, 2011 (in Ukrainian).
7. *Kalynyak B. M.* J. of Math. Sciences, 2015, No 3: 659–666.
8. *Kanwal R. P.* Linear integral equations: theory and technique, New York, London, Toronto, Sydney, San-Francisco: Academic Press, 1971.
9. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells, Boca Raton: CRC Press, 2009.
10. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* Advances in Comput. Math., 1996, **5**: 329–359.

Інститут прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 21.01.2015

Б. Н. Калыняк

Определение температурного поля и термомеханических характеристик материала, обеспечивающих нулевые радиальные напряжения в неоднородном вдоль радиуса длинном полом цилиндре

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов

Предложен метод определения температурного поля и термомеханических характеристик, обеспечивающих нулевые радиальные напряжения по толщине длинного полого неоднородного вдоль радиуса цилиндра. Решение соответствующей неклассической несвязанной стационарной задачи термоупругости сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно температуры. Получены точные аналитические выражения для температурного поля в цилиндре и концентрации одной из составляющих двухкомпонентного функционально-градиентного материала, обеспечивающей в модели простой смеси нулевые радиальные и окружные напряжения в случае отсутствия массовых сил и осевой нагрузки. Проведены расчеты соответствующих температурных полей и термомеханических характеристик для реально существующих материалов.

Ключевые слова: термоупругость, функционально-градиентные материалы, обратная задача, термомеханические характеристики материалов, полый цилиндр, отсутствие напряжений, интегральные уравнения, точные решения.

B. M. Kalynyak

Determining the temperature field and thermomechanical characteristics of a material, which ensure zero radial stresses in a long hollow cylinder inhomogeneous in the radial direction

Ya. S. Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Lviv

A method to determine the temperature field and thermo-mechanical characteristics of a material, providing zero radial stresses along a radius in the inhomogeneous long hollow cylinder is proposed. The solution of the corresponding nonclassical steady uncoupled thermoelasticity problem is reduced to solving a Fredholm integral equation of the second kind relative to the temperature. Exact analytical expressions for the temperature field and the concentration of one ingredient of a two-component functionally graded material providing the zero radial and hoop stresses in limits of a simple-mixture model in the absence of mass forces and the axial loading are obtained. The numerical calculations of temperature fields and thermo-mechanical characteristics for real materials are presented.

Keywords: thermo-elasticity, functional-graded materials, inverse problem, thermo-mechanical characteristics of materials, hollow cylinder, absence of stresses, integral equations, exact solutions.