Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. В. Грищук

Гіперкомплексні моногенні функції бігармонічної змінної в деяких задачах плоскої теорії пружності

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. Ю. Трохимчуком)

Одержано вирази для розв'язків системи рівнянь рівноваги Ляме у зміщеннях через компоненти гіперкомплексних моногенних функцій бігармонічної змінної. Знайдено опис усіх моногенних функцій, що мають однією з дійсних компонент дану бігармонічну функцію, асоційовану з розв'язком задачі Фламана для ізотропної півплощини.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, бігармонічна функція, бігармонічна алгебра, бігармонічна площина, моногенна функція, система рівнянь рівноваги Ляме у зміщеннях, задача Фламана для ізотропної півплощини.

Асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею 1, згідно з роботою [1], будемо називати *бігармонічною*, якщо вона містить базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє вимоги

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \qquad e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{1}$$

який також будемо називати *бігармонічним.*

Ця алгебра єдина [1], породжується небігармонічним базисом $\{1, \rho\}$, де $\rho^2 = 0$. Дану алгебру будемо позначати через $\mathbb{B}$. Обмежимося надалі розглядом бігармонічного базису $\{e_1, e_2\}$ з такою таблицею множення:

$$e_1 = 1, \qquad e_2^2 = e_1 + 2ie_2, \tag{2}$$

де i — уявна комплексна одиниця комплексної площини $\mathbb{C}$. Базис $\{e_1, e_2\}$ пов'язаний з нільпотентом ρ співвідношенням $\rho = 2 + 2ie_2$.

Бігармонічний базис (2) введено у розгляд авторами роботи [2].

Розглянемо евклідову норму $\|a\| := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$, де $a = z_1e_1 + z_2e_2 \in \mathbb{B}$ та $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Нехай D_ζ є областю *бігармонічної площини* $\mu := \{xe_1 + ye_2\}$, де x, y — дійсні. Нехай $D_z := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon \zeta = e_1x + e_2y \in D_\zeta\}$. Розглядаємо моногенні в D_ζ функції, тобто функції виду $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$:

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y)e_1 + U_2(x,y)ie_1 + U_3(x,y)e_2 + U_4(x,y)ie_2, \tag{3}$$

$x, y \in \mathbb{R}$, що мають класичну похідну в кожній точці ζ з D_ζ. Кожна компонента U_k, $k = \overline{1,4}$, є бігармонічною функцією в $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \zeta = x + e_2 y \in D_\zeta\}$ (див., наприклад, [3, 4]), тобто задовольняє бігармонічне рівняння в області D:

$$\Delta^2 U(x,y) \equiv \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U(x,y)}{\partial y^4} = 0. \tag{4}$$

Для кожної функції $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ в зображенні виду (3) будемо позначати $U_k[\Phi] := U_k$, $k = 1, \ldots, 4$.

У роботі [4] одержано конструктивний опис усіх моногенних функцій бігармонічної змінної ζ за допомогою голоморфних функцій комплексної змінної і встановлено їх аналітичні властивості, аналогічні властивостям функцій комплексної змінної: інтегральна теорема та інтегральна формула Коші, теорема Морера, теорема єдиності, тейлорівські та лоранівські розвинення. Зокрема, встановлено, що довільна моногенна функція $\Phi \colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ бігармонічної змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta$ подається через дві аналітичні функції F, F_0 комплексної змінної $z = x + iy \in D_z$ у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F(z)e_1 - \left(\frac{iy}{2}F'(z) - F_0(z)\right)\rho \equiv \mathrm{F}[u_1, v_1, u_0, v_0](z), \tag{5}$$

де $u_1(x,y) := \operatorname{Re} F(z)$, $v_1(x,y) := \operatorname{Im} F(z)$, $u_0(x,y) := \operatorname{Re} F_0(z)$, $v_0(x,y) := \operatorname{Im} F_0(z)$, $z = x+iy$.

Зауважимо, що в роботі [5] рівність (5) записана за базисом $\{1, 2i\rho\}$ і встановлена для моногенних функцій Φ, визначених у *правильних* відносно осі y областях D_ζ, тобто в таких областях, що з кожною своєю точкою $(x,y) \in D$, $y > 0$, містять і відрізок, що сполучає точки (x,y) та $(x,-y)$.

У роботах [6, 7] розглянуто асоціативну, комутативну над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ алгебру четвертого рангу з одиницею 1, що складається з елементів виду $\{a + jb + j^2c + j^3d\}$, де елемент алгебри j задовольняє співвідношення

$$(1 + j^2)^2 = 0, \tag{6}$$

а компоненти a, b, c, d є дійсними числами. Компоненти моногенних функцій $F(x + jy) = a(x,y) + jb(x,y) + j^2c(x,y) + j^3d(x,y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, задовольняють бігармонічне рівняння (4). Встановлено аналітичні властивості даних моногенних функцій для функцій, визначених на відрізку. Кожний елемент даної алгебри можна подати у вигляді $c_1 + \rho c_2$, де c_k, $k = 1, 2$, — комплексні числа. Отже, дана алгебра збігається з бігармонічною алгеброю (з точністю до ізоморфізму) $\mathbb{B}$. Рівність (6) показує, що базис $\{1, j\}$ є бігармонічним. Умови моногенності Коші–Рімана функції $F(x,y)$ збігаються з системою рівнянь рівноваги Нав'є плоскої теорії пружності у випадку відсутності об'ємних сил (див. [8, с. 104; 9, с. 368]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \Delta^2 \tau_{xy} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

при ототожненні σ_x з c, σ_y з a, τ_{xy} з c.

1. Моногенні функції і рівняння рівноваги Ляме у зміщеннях. Розглянемо систему рівнянь рівноваги Ляме у зміщеннях у випадку відсутності об'ємних сил (див. [10, с. 100] при $F_1 = F_2 \equiv 0$, $u := u_1$, $v := u_2$):

$$\begin{cases} \Delta u + \gamma \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ \Delta v + \gamma \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\theta := \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$, $\gamma = (\lambda + \mu)\mu^{-1}$, λ і μ — сталі Ляме. Відмітимо, що γ є деякою додатною сталою, що залежить від пружних властивостей середовища; зміщення $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є бігармонічними функціями в області D, а функція поверхневого розширення $\theta(x, y)$ — гармонічною.

Відшуканню розв'язків системи (8) присвячено чимало досліджень, відзначимо, наприклад, книгу [11], де автор відшуковує поліноміальні розв'язки.

У роботі [12] одержано частинні розв'язки системи (8) для області D, опуклої в напрямку осі Oy, через компоненти $U_k(x, y)$, $k = \overline{1, 4}$, моногенної функції (3) в областях, опуклих у напрямку осі y. Зауважимо, що умову опуклості можна зняти, застосовуючи зображення (5) моногенної функції через дві аналітичні функції комплексної змінної та умову моногенності Коші–Рімана (див. [3]). Справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай функція* (3) *є моногенною в області* D_ζ. *Тоді пари функцій*

$$u(x, y) = \frac{2}{\gamma} U_1(x, y) - \frac{2+\gamma}{\gamma} U_4(x, y), \qquad v(x, y) = U_2(x, y),$$

$$u(x, y) = -\frac{2+\gamma}{\gamma} U_2(x, y) - \frac{2(1+\gamma)}{\gamma} U_3(x, y), \qquad v(x, y) = U_4(x, y),$$

$$u(x, y) = -\frac{2}{\gamma} U_2(x, y) - \frac{2+\gamma}{\gamma} U_3(x, y), \qquad v(x, y) = U_1(x, y)$$

є розв'язками системи (8).

Аналогічним чином узагальнюються усі інші результати роботи [12].

2. Моногенні функції і розв'язки задач типу задачі Фламана для ізотропної півплощини. Задача про зосереджену силу, прикладену перпендикулярно до поверхні пружної ізотропної півплощини, відома як задача Фламана (див. [9, с. 516; 13, с. 109]).

Математично дана задача полягає у відшуканні бігармонічної функції напружень U у верхній півплощині $\pi^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$ з крайовими умовами при $y = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad U = u, \tag{9}$$

де u — певна дійснозначна функція.

Для розв'язання даної задачі необхідно знайти бігармонічну функцію напружень $\mathcal{U} := U$ у верхній півплощині π^+ у випадку відсутності навантаження, дотичного до межі півплощини, тобто лише пов'язану крайовою умовою $\partial\mathcal{U}/\partial y = 0$ при $y = 0$. Відомо (див. [9, с. 516]), що функція $\mathcal{U}$ має вигляд

$$\mathcal{U}(x, y) = \varphi(x, y) - y \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \tag{10}$$

де φ — довільна гармонічна у верхній півплощині функція.

Розписуючи покомпонентно моногенну функцію (5) та застосовуючи рівність $\rho = 2 + 2ie_2$, одержуємо для кожного $\zeta = x + e_2 y \in D_\zeta$ рівності

$$U_1[\Phi(\zeta)] = u_1(x,y) - y\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} + 2u_0(x,y), \tag{11}$$

$$U_2[\Phi(\zeta)] = v_1(x,y) - y\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} + 2v_0(x,y), \tag{12}$$

$$U_3[\Phi(\zeta)] = -\left(2v_0(x,y) - y\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}\right), \tag{13}$$

$$U_4[\Phi(\zeta)] = 2u_0(x,y) - y\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y}, \tag{14}$$

де пари функцій $u_1(x,y)$, $v_1(x,y)$ і $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$, відповідно, є гармонічно спряженими функціями комплексної змінної $z = x + iy$.

Розглянемо верхню півплощину $\Pi^+ := \{\zeta = xe_1 + ye_2 \in \mu \colon y > 0\}$ бігармонічної площини μ. Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай функція $\mathcal{U}$ є загальним розв'язком крайової задачі, що полягає у відшуканні бігармонічної функції в π^+ такої, що $\partial\mathcal{U}/\partial y = 0$ при $y = 0$. Нехай $u_1(x,y)$, $v_1(x,y)$ є довільними гармонічно спряженими функціями комплексної змінної $z = x + iy$ у верхній півплощині $\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Тоді мають місце рівності*

$$\mathcal{U}(x,y) = U_k[\Phi_k(\zeta) + \Phi_{k,0}(\zeta)], \qquad k = \overline{1,4}, \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in \Pi^+, \tag{15}$$

де

$$\Phi_1(\zeta) := \mathrm{F}[u_1, v_1, 0, ia](z), \qquad \Phi_2(\zeta) := \mathrm{F}[u_1, v_1, a, 0](z),$$

$$\Phi_3(\zeta) := -\mathrm{F}\left[u_1, v_1, \frac{u_1}{2}, \frac{v_1}{2}\right](z), \qquad \Phi_4(\zeta) := -\Phi_3(\zeta),$$

$$\Phi_{1,0}(\zeta) := i(-a_1x^2 + a_2x - a_1y^2 - b_2y + b_3) + e_2(2a_1y^2 + 2b_2y + a_3) + $$
$$+ ie_2(-2a_1xy - b_2x + a_2y + c),$$

$$\Phi_{2,0}(\zeta) := a_1x^2 + a_2x + a_1y^2 + b_1y + a_3 + e_2(2a_1xy + b_1x + a_2y + c) +$$
$$+ ie_2(2b_1y^2 + 2b_2y + b_3),$$

$$\Phi_{3,0}(\zeta) := 2a_1x^2 + 2a_2x + a_3 + i(2a_1xy + b_1x + a_2y + c) + ie_2(a_1x^2 + a_2x + a_1y^2 + b_1y + b_3),$$

$$\Phi_{4,0}(\zeta) := 2b_1xy + b_2x - a_1y + c + i(-2b_1x^2 + 2a_1x + a_2) + e_2(b_1x^2 - a_1x + b_1y^2 + b_2y + b_3),$$

де a, c, a_k і b_k, $k = 1,2,3$, є довільними дійсними числами.

Для кожного фіксованого $k \in \{1,\ldots,4\}$ формула

$$\widetilde{\Phi}_k(\zeta) = \Phi_k(\zeta) + \Phi_{k,0}(\zeta) \qquad \forall\, \zeta = xe_1 + ye_2 \in \Pi^+ \tag{16}$$

описує усі моногенні в Π^+ функції такі, що виконується рівність $\mathcal{U}(x,y) = U_k[\widetilde{\Phi}_k(\zeta)]$.

Теорема доводиться з урахуванням рівностей (11)–(14) та інтегруванням умови моногенності Коші–Рімана (див. [3]) з певним $U_k \equiv 0$, $k \in \{1,\ldots,4\}$.

Використовуючи одержані вирази моногенних функцій та розв'язуючи відповідну задачу Діріхле для гармонічних функцій, можна описати усі моногенні функції, фіксована компонента яких є розв'язком задачі Фламана.

Для випадку навантаження силою, що прикладена вздовж поверхні пружної ізотропної півплощини, можна встановити аналогічні результати. При цьому крайові умови (9) замінюються на такі (див. [9, с. 520]): $\partial U/\partial y = P(x)$, $U = 0$ при $y = 0$, а функція навантажень має вигляд $U(x, y) = y f_2(x, y)$, де гармонічна в π^+ функція f_2 є розв'язком задачі Діріхле: $f_2(x, 0) = P(x)$, а отже, подається інтегралом Пуассона $f_2(x, y) = \dfrac{y}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{P(t)dt}{(x-t)^2 + y^2}$.

Цитована література

1. *Мельниченко И. П.* Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 2. – С. 252–254.
2. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 25–27.
3. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической алгебре // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 12. – С. 1587–1596.
4. *Грищук С. В., Плакса С. А.* Моногенные функции в бигармонической плоскости // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 13–20.
5. *Ковалев В. Ф.* Бигармоническая задача Шварца. – Киев, 1986. – 19 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 86.16).
6. *Sobrero L.* Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata // Ric. Ingegn. – 1934. – **13**, No 2. – P. 255–264.
7. *Sobrero L.* Alcuni teoremi della teoria delle funzioni ipercomplesse // Rend. Accad. d. L. Roma. – 1934. – **6(19)**. – P. 135–140.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
9. *Лурье А. И.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1970. – 940 с.
10. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. Учебник для университетов. – 3-е изд., доп. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
11. *Бондаренко Б. А.* Полигармонические полиномы. – Ташкент: Фан, 1968. – 172 с.
12. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические потенциалы и плоские изотропные поля смещений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 229–231.
13. *Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б.* Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – Київ: Вища шк., 1995. – 304 с.

References

1. *Mel'nichenko I. P.* Ukr. Mat. J., 1986, **38**, No 2: 252–254 (in Russian).
2. *Kovalev V. F., Mel'nichenko I. P.* Dokl. AN USSR, Ser. A, 1981, No 8: 25–27 (in Russian).
3. *Grishchuk S. V., Plaksa S. A.* Ukr. Math. J., 2009, **61**, No 12: 1865–1876.
4. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Dopov. NAN Ukraine, 2009, No 12: 13–20 (in Ukrainian).
5. *Kovalev V. F.* Biharmonic Schwarz problem. Preprint No 86.16. Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 1986 (in Russian).
6. *Sobrero L.* Ric. Ingegn., 1934, **13**, No 2: 255–264.
7. *Sobrero L.* Rend. Accad. d. L. Roma, 1934, **6(19)**: 135–140.
8. *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending, Leiden: Noordhoff International Publishing, 1977.
9. *Lurie A. I.* Theory of elasticity, Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).

10. *Amenzhade Yu. A.* Theory of elasticity. Textbook for universities, 3-d ed., Moscow: Vyshaya Shkola, 1976 (in Russian).
11. *Bondarenko B. A.* Polyharmonic polynomials, Tashkent: Fan, 1968 (in Russian).
12. *Kovalev V. F., Mel'nichenko I. P.* Ukr. Math. J., 1988, **40**, No 2: 197–199.
13. *Guz' A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B.* Contact interaction for elastic bodies with initial stresses, Kyiv: Vyshcha Shkola, 1995 (in Ukrainian).

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 27.01.2015*

С. В. Грищук

Гиперкомплексные моногенные функции бигармонической переменной в некоторых задачах плоской теории упругости

Институт математики НАН Украины, Киев

Получены выражения для решений системы уравнений равновесия Ляме в смещениях через компоненты гиперкомплексных моногенных функций бигармонической переменной. Получено описание всех моногенных функций, которые в качестве одной из действительных компонент имеют бигармоническую функцию, ассоциированную с решением задачи Фламана для изотропной полуплоскости.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, бигармоническая функция, бигармоническая алгебра, бигармоническая плоскость, моногенная функция, система уравнений равновесия Ляме в смещениях, задача Фламана для изотропной полуплоскости.

S. V. Gryshchuk

Hypercomplex monogenic functions of the biharmonic variable in some problems of plane elasticity theory

Institute Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

Solutions of the Lamè equilibrium system of equations for displacements are obtained via components of the hypercomplex monogenic functions of the biharmonic variable. The description of all monogenic functions, for which one of the real components is a biharmonic function associated with a solution of the Flamant problem for an isotropic half-plane, is obtained.

Keywords: biharmonic equation, biharmonic function, biharmonic algebra, biharmonic plane, monogenic function, Lamè equilibrium system in displacements, Flamant problem for isotropic semiplane.