УДК 513.83;517.5

Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук

Задача о тени

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Получено полное решение проблемы о тени, что эквивалентно нахождению условий принадлежности точки обобщенно выпуклой оболочке семьи компактных множеств.

Ключевые слова: m-выпуклое множество, m-оболочка множества, задача о тени, симплекс, m-полувыпуклое множество, m-полувыпуклая оболочка множества.

Главная цель работы — решение задачи о тени, которую можно рассматривать как нахождение условий, обеспечивающих принадлежность точки обобщенно выпуклой оболочке некоторого семейства множеств.

Определение 1. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-выпукло относительно точки $x \in \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если найдется m-мерная плоскость L такая, что $x \in L$ и $L \bigcap E = \varnothing$.

Определение 2. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-выпукло, если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Легко убедиться, что оба приведенные определения удовлетворяют известной аксиоме выпуклости: пересечение каждого подсемейства таких множеств тоже удовлетворяет определению. Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ мы можем рассматривать минимальное m-выпуклое множество, содержащее E, и назвать его m-оболочкой множества E.

Как частный случай принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров можно привести следующую задачу о тени, рассмотренную Г. Худайбергановым [1–3].

Задача (о тени). Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса, меньшего радиуса сферы, достаточно, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров?

Другими словами эту задачу можно переформулировать так. Сколько замкнутых шаров радиуса, меньшего радиуса сферы, с центрами на сфере (минимальное количество) обеспечит принадлежность центра сферы 1-оболочке семейства шаров?

Если в сферу вписать правильный n-мерный симплекс и разместить шары радиуса, равного половине длины ребра симплекса, в его вершинах, то очевидно, что эта система шаров создает тень для центра сферы. Однако при этом мы нарушим одно условие — шары попарно касаются друг друга. Пусть a — половина длины ребра правильного симплекса. Рассмотрим семейство из $n+1$ шаров радиусов $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon/2$, $a-\varepsilon/2^2, \ldots, a-\varepsilon/2^n$ для достаточно малого числа ε. Разместим эти шары так, чтобы они попарно касались друг друга, а их центры образовывали симплекс, мало отличающийся от правильного. Через центры этих шаров проходит единственная сфера, центр которой принадлежит 1-оболочке семейства шаров. Внутренности этого семейства шаров образуют семейство из $n+1$ открытого шара, для которого центр сферы принадлежит 1-оболочке этого семейства. Если же исходные замкнутые шары немного уменьшить, то в силу непрерывности очевидно, что $n+1$ замкнутого шара достаточно для создания тени.

Лемма 1. *Если множество* $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \subset \mathbb{R}^n$ *представляет собой объединение из* $n-1$ *выпуклого множества, то* E *— 1-выпуклое множество.*

Из этой леммы следует, что произвольной совокупности из $n-1$ шаров для создания тени мало. Поэтому точное значение необходимого количества шаров n или $n+1$.

Следствие 1. *Если множество* $E = \bigcup\limits_{i=1}^{m-1} E_i \subset \mathbb{R}^n$ *представляет собой объединение из* $m-1$ *выпуклого множества, где* $m < n$, *то* E *—* $(n-m)$*-выпуклое множество.*

Задача о тени была решена Г. Худайбергановым для $n = 2$ (показано, что двух шаров достаточно). Им же было предложено решение при $n > 2$, которое оказалось ошибочным, и, насколько известно авторам, точное значение количества шаров остается открытой проблемой. Дальнейшие рассуждения позволят дать полный ответ на эту проблему.

Теорема 1. *Существует два замкнутых (открытых) шара с центрами на единичной окружности и радиуса меньше* 1, *которые обеспечивают принадлежность центра окружности* 1*-оболочке семейства шаров.*

Следствие 2. *Существует два замкнутых (открытых) шара с центрами на сфере* S^{n-1} *и радиуса, меньшего радиуса сферы, которые обеспечивают принадлежность центра сферы* $(n-1)$*-оболочке семейства шаров.*

Покажем, что в случае двумерной сферы трех шаров недостаточно. Точки пространства будем обозначать координатами (x, y, z). Не нарушая общности, предположим, что сфера с центром в начале координат имеет радиус 1 и что трех открытых шаров достаточно для создания тени в центре сферы. Предположим, что имеют место неравенства для радиусов шаров $1 \geqslant r_1 > r_2 > r_3$. Мы можем считать, что шары попарно касаются друг друга, иначе мы могли бы их увеличить с тем же эффектом для тени. Расположим центр шара максимального радиуса в точке $(0, 0, 1)$. Проведем двумерную плоскость L через центры шаров B_1, B_2 и начало координат. Каждый из этих шаров порождает круговой конус с центром в начале координат такой, что произвольная прямая, лежащая внутри конуса, пересекает этот шар. Этот конус пересекает сферу по двум окружностям, которые можно задать парой параллельных плоскостей. Им в плоскости L соответствуют две прямые GB и CA. Полоса между этими плоскостями вырезает из сферы часть тех точек, для которых каждая прямая проходит через центр сферы, и такую точку не пересекает соответственный шар. Аналогично для второго шара получим две прямые CG и AB в плоскости L.

Пересечение двух полос, соответствующих двум шарам, представляет собой цилиндр, в основании которого лежит параллелограмм $ABGC$. Этот цилиндр вырезает на сфере множество тех точек, для которых каждая прямая, которая проходит через центр сферы и такую точку, не пересекает оба шара. Теперь очевидно, что радиус третьего шара, необходимого для создания тени, не может быть меньше половины диагонали BC этого параллелограмма. Несложно показать, что это равно

$$\frac{\sqrt{2 - r_1^2 - r_2^2 - 2\sqrt{1-r_1^2}\sqrt{1-r_2^2}\cos(2\arcsin((r_1+r_2)/2))}}{\sin 2(\arcsin((r_1+r_2)/2))}. \tag{1}$$

Произведем числовые оценки. Поскольку из вписанных в окружность треугольников максимальный периметр имеет правильный треугольник, то сумма радиусов шаров не превосходит полупериметра правильного треугольника, вписанного в единичную окружность

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 1{,}5\sqrt{3} \approx 2{,}598. \tag{2}$$

Радиус шара B_2 не может быть меньше $\sqrt{2}/2$, иначе в силу неравенства $r_2 > r_3$ шары B_2 и B_3 не смогут обеспечить пересечение с ними произвольной прямой, проходящей через начало координат и лежащей в плоскости xOy, а шар B_1 с этой плоскостью не пересекается.

С помощью программы Derive из (1) находим, что если $r_2 < 0{,}77$, то $r_3 > 0{,}77$. Следовательно, не выполнено неравенство $r_2 > r_3$. Если же $r_2 > 0{,}85$, то также с использованием программы Derive получаем неравенство $r_1+r_2+r_3 > 2{,}6$, что противоречит (2). Для суммы радиусов шаров имеем неравенства $1{,}54 < 2r_2 < r_1 + r_2 \leqslant 1 + r_2 < 1{,}85$.

Используя эти оценки, получаем, что каждую окружность, по которым шары B_2 и B_3 пересекают плоскость xOy, видно из начала координат под углом, не превышающим 1,4472. Эти две окружности суммарно закрывают угол, который не превышает 2,8945, что меньше развернутого угла размера π. Поэтому в плоскости xOy существует прямая через начало координат, не пересекающая ни один из трех шаров. Следовательно, для создания тени в центре сферы при $n = 3$ необходимо четыре шара. При $n > 3$ оценка получается с применением математической индукции. Рассмотрим гиперплоскость через центр сферы, которая не пересекает один из шаров. Для создания тени в начале координат этой гиперплоскости, согласно предположению индукции, необходимо n шаров. Поэтому, прибавляя шар, который не пересекает выбранную гиперплоскость, получаем необходимость $(n + 1)$-го шара. Получили следующее утверждение, полностью решающее проблему тени.

Теорема 2. *Для того чтобы центр $(n-1)$-сферы в n-мерном евклидовом пространстве при $n > 2$ принадлежал 1-оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса, не превышающего (меньшего) радиуса сферы, и с центрами на сфере, необходимо и достаточно $(n + 1)$-го шара.*

Рассмотрим более общие по отношению к предыдущим определениям объекты.

Определение 3. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-полувыпукло относительно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если найдется m-мерная полуплоскость P такая, что $x \in P$ и $P \bigcap E = \varnothing$.

Определение 4. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ m-полувыпукло, если оно m-полувыпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Легко убедиться, что и эти определения удовлетворяют аксиоме выпуклости, и мы можем строить m-полувыпуклые оболочки множеств тоже согласно этим определениям.

Рассмотрим аналог задачи о тени для полувыпуклости. Какое минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с центрами на сфере S^{n-1} и радиуса, меньшего (не превышающего) радиуса сферы, достаточно, чтобы любой луч из центра сферы пересекал хотя бы один из этих шаров?

Задача проста в плоском случае $n = 2$. Если мы впишем в окружность остроугольный треугольник с неравными сторонами $a > b > c$, а в его вершинах разместим три замкнутых круга радиусов $p-a$, $p-b$, $p-c$ соответственно, где $p = (a+b+c)/2$, то очевидно, что полувыпуклая оболочка объединения этих кругов состоит из кругов и внутренности треугольника. Если центр окружности не принадлежит объединению кругов, то такая конструкция обеспечит тень и в этой точке. Теперь, как и выше, пользуясь непрерывностью, если чуть уменьшить радиусы кругов, то получим, что при $n = 2$ три замкнутых (открытых) круга решают задачу. Исследуем соотношение сторон треугольника, которые обеспечивают решение. Из неравенств $p - a < p - b < p - c$ следует, что радиус описанной окружности должен превышать $p - c$. Не нарушая общности, будем считать, что сторона $c = 1$ и справедливы неравенства $a > b > 1$. Другие треугольники с нужным свойством получаются преобразованием подобия. Из формулы для радиуса описанной окружности, заменяя стороны треугольника переменными $x = a$, $y = b$, получим, что координаты нужных сторон должны находиться внутри криволинейного треугольника, две стороны которого прямые $x = y$, $y = 1$, а третья — кривая, заданная неявным уравнением:

$$x + y - 1 = \frac{2xy}{\sqrt{(x+y+1)(-x+y+1)(x-y+1)(x+y-1)}}.$$

Построив график в Derive, убеждаемся, что множество таких точек непустое. Следовательно, справедливо утверждение.

Теорема 3. *Для того чтобы центр окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) кругов радиуса, не превышающего (меньшего) радиуса окружности, и с центрами на этой окружности, необходимо и достаточно трех кругов.*

С увеличением размерности задача усложняется. Покажем сначала, что существуют семейства выпуклых множеств, 1-полувыпуклая оболочка которых совпадает с таким семейством.

Лемма 2. *Если множество $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$, где все множества K_i — выпуклые компакты, то $H^k(K) = 0$, $k \geqslant n-1$ при $n > 1$ ($H^k(K)$ — группы когомологий компакта K [5]).*

Теорема 4. *Каждое множество $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ в $\mathbb{R}^n$, где все множества K_i — выпуклые компакты, является 1-полувыпуклым.*

Замечание. Из множества $(n-1)$-мерных граней n-мерного симплекса легко составить множество, которое 1-полувыпуклым не будет.

Усложним задачу, наложив на множество дополнительные условия. Исследуем, когда семейство шаров с центрами на фиксированной сфере обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке семейства.

Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — единичная сфера. Выберем два открытых шара единичного радиуса в точках $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$. Теперь лучи, которые не пересекают эти два шара, должны лежать в плоскости xOy. Открытый шар радиуса $\sqrt{2}-1$ в точке $(1,0,0)$ касается заданных двух шаров и виден из начала координат в плоскости xOy под углом α, синус половины которого равен $\sqrt{2}-1$. Следовательно, $\alpha/2 = \arcsin(\sqrt{2}-1)$, $\alpha = 0{,}8542$. Поскольку этот угол помещается 7,35 раз в развернутом угле 2π, то заполним окружность в плоскости xOy четырьмя шарами радиуса $\sqrt{2}-1$ с центрами в точках $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$ соответственно. После этого между ними можно поместить четыре шара радиусов $3-2\sqrt{2}$ с центрами в точках пересечения единичной окружности плоскости xOy с биссектрисами координатных углов. Эти шары касаются двух соседних из предыдущих четырех. В силу разности радиусов соседних шаров с центрами в плоскости xOy этот набор из 10 шаров обеспечит принадлежность центра сферы 1-полувыпуклой оболочке их объединения. Как и выше, чуть уменьшая радиусы шаров, видим, что существует набор замкнутых 10 шаров с теми же свойствами. Получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы центр двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве принадлежал 1-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых) шаров радиуса, не превышающего (меньшего) радиуса сферы, и с центрами на сфере, достаточно 10 шаров.*

Следствие 3. *Для того чтобы центр $(n-1)$-мерной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ принадлежал $(n-2)$-полувыпуклой оболочке семейства открытых (замкнутых)* *шаров радиуса, не превышающего (меньшего) радиуса сферы, и с центрами на сфере, достаточно* 10 *шаров.*

Следующие вопросы остаются открытыми.

Вопрос 1. Какое минимальное количество шаров в трехмерном евклидовом пространстве обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

В размерностях выше трех неясно даже существование конечного необходимого множества шаров.

Вопрос 2. Существует ли конечное количество шаров с перечисленными выше условиями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, которое обеспечит принадлежность центра сферы их 1-полувыпуклой оболочке?

Если разрешить центрам шаров находиться на двух концентричных сферах, то, используя конструкцию для 1-выпуклости в $\mathbb{R}^n$, шары и радиус второй сферы получим гомотетией относительно центра первой сферы. Коэффициент гомотетии выберем с отрицательным знаком так, чтобы образ гомотетии не пересекался с исходным множеством. Очевидно, что центр сферы будет принадлежать 1-полувыпуклой оболочке шаров. Поэтому $2n + 2$ шаров для этого достаточно.

Цитируемая литература

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. – Киев: Наук. думка, 1993. – 264 с.
2. *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы. – Київ, 2012. – 280 с. – (Праці Інституту математики НАН України, Т. 92).
3. *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров. – Москва, 1982. – Деп. в ВИНИТИ 21.02.1982, No 1772-85.
4. *Шеффер Х.* Топологические векторные пространства. – Москва: Мир, 1971. – 360 с.
5. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. – Москва: Мир, 1971. – 680 с.
6. *Зелинский Ю. Б.* Теорема Хелли и смежные вопросы // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, No 1. – С. 125–128.
7. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.

References

1. *Zelinskii Yu. B.* Multivalued mappings in the analysis, Kiev: Naukova Dumka, 1993 (in Russian).
2. *Zelinskii Yu. B.* Convexity. Selected topics. Proc. of Institute of Mathematics NASU, Kiev, 2012, Vol. 92 (in Russian).
3. *Khudaiberganov G.* On uniformly polynomially convex hull of the union of balls, Moscow, 1982, Manuscript Dep. VINITI 02.21.1982, № 1772–85 (in Russian).
4. *Schaefer H.* Topological vector spaces. – Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3, New York, Berlin: Springer, 1971.
5. *Spanier E.* Algebraic topology, New York, Berlin: Springer, 1981.
6. *Zelinskii Yu. B.* Ukr. Math. J., 2002, **54**, No 1: 149–153.
7. *Leichtweiss K.* Konvexe Mengen, Berlin, New York: Springer, 1980.

Институт математики НАН Украины, Киев *Поступило в редакцию 16.12.2014*

Ю. Б. Зелінський, І. Ю. Виговська, М. В. Стефанчук

Задача про тінь

Інститут математики НАН України, Київ

Отримано повний розв'язок проблеми про тінь, що еквівалентно знаходженню умов належності точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин.

Ключові слова: m-опукла множина, m-оболонка множини, задача про тінь, симплекс, m-напівопукла множина, m-напівопукла оболонка множини.

Yu. B. Zelinskii, I. Yu. Vyhovs'ka, M. V. Stefanchuk

Shadow's problem

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev

The problem of shadow is solved. It is equivalent to the condition for a point to be in the generalized convex hull of a family of compact sets.

Keywords: m-convex set, m-hull of a set, problem of shadow, simplex, m-semiconvex set, m-semiconvex hull of a set.