



УДК 517.95

Т. М. Засадко

Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Прокласифіковано інтеграл руху першого роду для рівняння Шрьодінгера зі змінною масою. Вказано вісім класів рівнянь з нееквівалентною симетрією. Вони включають в себе інтегровні, суперінтегровні та максимально суперінтегровні системи. Повний набір розв'язків однієї з цих систем наведений в явному вигляді.

Ключові слова: рівняння Шрьодінгера, гамільтоніани, інтеграл руху, інтегровні системи, суперінтегровні системи, максимально суперінтегровні системи, алгебра Лі.

Дослідження симетрії та інтегралів руху рівняння Шрьодінгера знаходиться в центрі уваги багатьох дослідників (див., наприклад, [1]). В той же час рівняння Шрьодінгера зі змінною масою до останнього часу залишалося не дослідженим попри те, що вони широко використовуються у фізиці твердого тіла. У роботах [2, 3] були вперше систематично досліджені інтеграл руху та симетрії тривимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінною масою.

У даній роботі вивчаються двовимірні рівняння Шрьодінгера зі змінною масою. Такі рівняння природно виникають після розділення змінних у рівняннях вищої розмірності, причому їх симетрії не можна отримати редукцією симетрій тривимірних рівнянь. Іншими словами, дослідження симетрії двовимірних рівнянь Шрьодінгера є самостійною задачею.

Визначальні рівняння. Розглянемо стаціонарне рівняння Шрьодінгера

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (1)$$

де

$$\hat{H} = p_a f(\mathbf{x}) p_a - V(\mathbf{x}) = -\partial_a f(\mathbf{x}) \partial_a - V(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2). \quad (2)$$

Тут $p_a = -i\partial_a$, $V(\mathbf{x})$ і $f(\mathbf{x}) = 1/m(\mathbf{x})$ — довільні функції.

Наша задача — знайти всі гамільтоніани (2), які допускають інтеграли руху, що належать до диференціальних операторів першого порядку. Такі інтеграли руху можна подати у вигляді

$$Q = \frac{1}{2}(\xi^a p_a + p_a \xi^a) + \tilde{\eta} = -i(\xi_a \partial_a + \eta), \quad (3)$$

де $\eta = \frac{1}{2}\partial_a \xi^a + i\tilde{\eta}$, ξ^i та η — невідомі функції від \mathbf{x} .

Згідно з визначенням, диференціальні вирази (2) та (3) повинні комутувати:

$$[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0. \quad (4)$$

Обраховуючи комутатор і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при різних похідних, дістаємо таку систему визначальних рівнянь:

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \delta_{ab}\xi_i^i = 0, \quad (5)$$

$$\xi^i f_i = f \xi_i^i, \quad (6)$$

$$-\xi^i f_{ai} + f_i \xi_i^a + f \xi_{cc}^a + 2f \eta_a = 0, \quad (7)$$

$$f_a \eta_a + f \eta_{aa} - \xi^i V_i = 0, \quad (8)$$

де δ_{ab} — символ Кронекера, і нижні індекси позначають похідні за відповідними змінними. Наприклад, $\xi_c^a = \partial \xi^a / \partial x_c$ і т.п. У тексті під індексами, що повторюються, розуміємо підсумовування за значеннями 1 і 2.

Формула (5) визначає рівняння для конформного вектора Кіллінга. Розв'язок цього рівняння може бути вибраний у такому вигляді (див., наприклад, [5]):

$$\xi^a = \lambda^a x^n x^n - 2x^a \lambda^n x^n + \mu^c \varepsilon^{ac} x^b + \omega x^a + \nu^a, \quad (9)$$

де ε^{ac} — одиничний антисиметричний тензор, грецькими літерами позначено константи інтегрування.

Згідно з (3), (9), загальний вигляд інтеграла руху першого порядку для гамільтоніана (2) задається такою формулою:

$$Q = \lambda^i K^i + \mu^i J^i + \omega D + \nu^i P^i + b, \quad (10)$$

де

$$P^i = p^i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad J^i = \varepsilon^{ijk} x^j p^k, \quad D = x^n p^n - i, \quad K^i = 2x^i D - x^n x^n p^i, \quad (11)$$

а b — невідома функція від \mathbf{x} . Ці рівняння характеризують алгебру Лі конформної групи у двовимірному евклідовому просторі. Іншими словами, з точністю до останнього доданка, пропорційного одиничному оператору, шуканий інтеграл руху є лінійною комбінацією генераторів конформної групи у двовимірному евклідовому просторі $E(2)$, яка виявляється максимально можливою групою симетрії досліджуваних рівнянь.

Алгоритм інтегрування визначальних рівнянь. Для знаходження розв'язків системи визначальних рівнянь (8), (7) і (6) треба перебрати усі нееквівалентні набори довільних

параметрів λ^a , μ^c , ν^a та ω , що визначають функції ξ^a згідно з формулою (9). З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів групи $S(2)$, такі набори визначаються оптимальною системою підалгебр алгебри $\mathfrak{c}(2)$, базисні елементи якої задані формулами (11). Для знаходження цих підалгебр скористаємося таким твердженням (див. [6]).

Твердження 1. *Алгебра $\mathfrak{c}(2)$ ізоморфна алгебрі Лі псевдоортогональної групи $SO(1, 2)$.*

Сформульований вище автоморфізм може бути заданий явно за допомогою таких співвідношень:

$$J^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c, \quad K^a = J^{0a} - J^{3a}, \quad P^a = J^{0a} + J^{3a}, \quad D = J^{30}, \quad (12)$$

де P^a , J^a , K^a та D — оператори (11). Ці співвідношення визначають алгебру $\mathfrak{so}(1, 2)$.

Згідно з наведеними твердженнями, оптимальна система підалгебр алгебри $\mathfrak{c}(2)$ збігається з оптимальною системою підалгебр алгебри $\mathfrak{so}(1, 3)$. Остання була знайдена в роботі [7], результатами якої ми і скористаємося.

Твердження 2. *Нееквівалентні підалгебри алгебри $\mathfrak{so}(1, 3)$ визначаються такими наборами базисних елементів.*

Одновимірні підалгебри:

$$\langle J_{12} \rangle, \quad \langle G_1 \rangle, \quad \langle J_{03} \rangle, \quad \langle J_{12} + \alpha J_{03} \rangle;$$

двовимірні підалгебри:

$$\langle G_1, G_2 \rangle, \quad \langle G_1, J_{03} \rangle, \quad \langle J_{12}, J_{03} \rangle;$$

тривимірні підалгебри:

$$\langle G_1, G_2, J_{03} \rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{12} \rangle, \quad \langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha J_{03} \rangle, \quad \langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle, \quad \langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle;$$

чотиривимірні підалгебри:

$$\langle G_1, G_2, J_{12}, J_{03} \rangle;$$

шестивимірні підалгебри:

$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle;$$

де $G_1 = J_{01} - J_{13}$, $G_2 = J_{02} - J_{23}$, $\alpha > 0$.

Таким чином, задача групової класифікації рівняння (1) зводиться до пошуку нееквівалентних розв'язків рівнянь (8), (7), (6), де ξ^a — функції, задані рівнянням (9). При цьому досить обмежитись такими наборами значень числових параметрів λ^i , μ^i , ν^i та ω , що відповідають підалгебрам, перерахованим вище.

Продиференціювавши (6) за a і підставивши в отримане рівняння $\xi^i f_{ai}$, виражене з (7), одержимо, що

$$\eta = -2\lambda^a x^a + c, \quad (13)$$

де λ^a — константи, що входять у загальний вираз (10) для операторів симетрії, а c — довільна константа, яка є несуттєвою і може бути опущена.

Результати класифікації. Для завершення групової класифікації рівнянь залишилося проінтегрувати визначальні рівняння (8), (7) та (6) для випадків, що відповідають підалгебрам, перерахованим у твердженні 2.

Нехай оптимальна підалгебра одновимірна і включає єдиний базисний елемент J_{03} . Відповідні функції ξ^1 , ξ^2 мають такий вигляд:

$$\xi^1 = -x_1, \quad \xi^2 = -x_2.$$

Підставивши ці функції в (6), отримаємо рівняння для невідомої функції f :

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = 2f,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$f(x) = F\left(\frac{x_2}{x_1}\right)x_1^2, \quad (14)$$

де $F(\cdot)$ — довільна функція своїх аргументів.

Пряма перевірка показує, що функції (14) тотожно задовольняють також рівняння (7).

Залишилося розв'язати останнє визначальне рівняння (8), яке набуває вигляду

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = 0. \quad (15)$$

Це лінійне однорідне рівняння, загальний розв'язок якого має такий вигляд:

$$V = \tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)x_1^2. \quad (16)$$

Розглянемо рівняння, що допускають симетрію відносно більш широких алгебр, які включають J_{03} і інші базисні елементи. Згідно з твердженням 2, достатньо розглянути дві двовимірні алгебри: $\langle G_1, J_{03} \rangle$ та $\langle J_{12}, J_{03} \rangle$. При цьому виникають додаткові умови інваріантності відносно дії операторів G_1 та J_{12} відповідно.

Розглянемо підалгебру $\langle G_1, J_{03} \rangle$. Підставивши відповідні значення функції ξ^a у рівняння (6) та (8), отримаємо додаткову систему визначальних рівнянь для f і V :

$$f_1 = 0, \quad V_1 = 0.$$

Ці умови забороняють залежність функцій $F(\cdot)$ та $\tilde{F}(\cdot)$ від x_1 , і допустимі функції f і V набувають вигляду

$$f(x) = \mu x_2^2, \quad V(x) = \nu x_2^2. \quad (17)$$

Для рівнянь, інваріантних відносно підалгебри $\langle J_{12}, J_{03} \rangle$, функції (14) та (16) повинні задовольняти такі додаткові умови:

$$x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0, \quad x_2 V_1 - x_1 V_2 = 0,$$

які отримуються при підстановці у (7) та (6) відповідних виразів для ξ^a та η . Ці умови сумісні з (14) та (16) тільки тоді, коли

$$f(x) = \mu x_2^2, \quad V = \nu x_2^2. \quad (18)$$

Аналогічно, стартуючи з інших одновимірних алгебр, наведених у згаданому твердженні, і послідовно розв'язуючи відповідні визначальні рівняння, знаходимо всі інші рівняння Шрьодінгера та їх алгебри симетрії. Ця процедура є алгоритмічною для всіх розв'язних оптимальних підалгебр. У нашому випадку нерозв'язними є тільки такі алгебри, що включають підалгебру $\mathfrak{so}(2)$. Результати щодо розв'язків визначальних рівнянь наведено в табл. 1.

Інтегрування системи, інваріантної відносно алгебри $\mathfrak{o}(3)$. Кожне з рівнянь (1), що відповідають функціям f і V , які наведені у рядках 7 і 8 табл. 1, допускає по два інтеграли руху, що комутують між собою, тобто є суперінтегровними. Це дає можливість відносно просто знайти їх точні розв'язки. Ми знайдемо такі розв'язки для гамільтоніана (2) з функціями f і V , наведеними в рядку 7 табл. 1:

$$H = \mu(p_a(1 + r^2)^2 p_a - 4r^2) + \nu. \quad (19)$$

Задачу на знаходження власних значень для даного гамільтоніана можна записати у вигляді

$$\tilde{H}\psi = -(\partial_a(1 + r^2)^2 \partial_a + 4r^2)\mu = \tilde{E}\psi, \quad (20)$$

де

$$\tilde{H} = \frac{1}{\mu}(H - \nu) \quad \text{і} \quad \tilde{E} = \frac{E}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}. \quad (21)$$

Рівняння (20) має такі інтеграли руху:

$$M^3 = x^1 p^2 - x^2 p^1, \quad (22)$$

$$M^a = \frac{1}{2}(r^2 - 1)p^a - x^a x^b p^b + i x^a, \quad a, b = 1, 2, \quad (23)$$

які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[M^a, M^b] = i \varepsilon^{abc} M^c. \quad (24)$$

Таблиця 1. Алгебри інваріантності рівнянь (2) та відповідні функції f та V , що визначають ці рівняння

N_0	Підалгебра	f	V
1	J_{12}	$F(r^2)$	$\tilde{F}(r^2)$
2	G_1	$F(x_2)$	$\tilde{F}(x_2)$
3	$J_{12} + \alpha J_{03}$	$F\left(-\ln(r) + \alpha \frac{x_2}{x_1}\right) r^2$	$\tilde{F}\left(-\ln(r) + \alpha \frac{x_2}{x_1}\right) r^2$
4	J_{03}	$F\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^2$	$\tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^2$
5	$\langle G_1, J_{03} \rangle$	μx_2^2	νx_2^2
6	$\langle J_{12}, J_{03} \rangle$	μr^2	νr^2
7	$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23} \rangle$	$\mu(r^2 + 1)^2$	$4\mu r^2 + \nu$
8	$\langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle$	$\mu(r^2 - 1)^2$	$4\mu r^2 + \nu$

Використовуючи згадану симетрію, можна алгебраїчно знайти власні значення \tilde{E} до розв'язання рівняння (20). Для цього обчислимо оператор Казіміра алгебри $\mathfrak{o}(3)$ для виразу (20):

$$C = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \frac{1}{4}(\tilde{H} - 4). \quad (25)$$

Згідно з (25) власні значення гамільтоніана можуть бути виражені через власні значення оператора C , які мають вигляд

$$C = q(q+1) = \frac{n^2 - 1}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (26)$$

Звідки отримуємо:

$$E = \mu(n^2 + 3) + c \quad \text{і} \quad \tilde{E} = n^2 + 3. \quad (27)$$

Наступним кроком буде знайти власні вектори, які відповідають власним значенням (27). Ввівши полярні координати і розклавши розв'язки за радіальними функціями

$$\psi = \sum_k \phi_k(r) \exp^{ik\varphi}, \quad (28)$$

отримаємо такі рівняння для радіальних функцій:

$$\left(-(r^2 + 1)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k^2}{r^2} - \frac{(1 + 5r^2)}{r(1 + r^2)} \frac{\partial}{\partial r} \right) - 4r^2 \right) \phi_k = (n^2 + 3)\phi_k, \quad (29)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ — спектральні параметри, які відповідають власним векторам квадрата орбітального моменту. В даному випадку гамільтоніан інваріантний відносно просторового відображення $x^1 \rightarrow x^1, x^2 \rightarrow -x^2$, яке трансформує ψ, ϕ таким чином:

$$\psi(x^1, x^2) \rightarrow \psi(x^1, -x^2), \quad \phi_k(r) \rightarrow \phi_{-k}(r). \quad (30)$$

Тому нам достатньо розглянути лише позитивні k .

Інтегровними в квадратурах розв'язками рівнянь (29) є

$$\phi_k = C_k^n r^k (r^2 + 1)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n} \mathcal{F} \left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n, \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}n \right], [1 + k], -r^2 \right), \quad (31)$$

де $F(\cdot)$ — гіпергеометрична функція, а C_k^n — константи інтегрування. Для того щоб розв'язки зникали на нескінченності потрібно, щоб $k \leq n - 1$.

Таким чином, максимально суперінтегровна система (20) є розв'язною. Точні розв'язки і спектр гамільтоніана задаються рівняннями (31) і (27).

Отже, в роботі проведена класифікація рівняння Шрьодінгера зі змінною масою для двовимірного випадку, що допускають інтеграли руху першого порядку. Деякі з цих рівнянь мають несподівані симетрії, наприклад, рівняння з лінії 7 табл. 1 інваріантне відносно алгебри Лі групи обертань у тривимірному просторі $SO(3)$. Нагадаємо що геометрична симетрія цих систем задається групою $SO(2)$.

Наведено список рівнянь, що допускають інтеграли руху першого порядку. Оскільки такі інтеграли руху є генераторами неперервних груп симетрій, то наведені результати

можна інтерпретувати як групову класифікацію рівнянь (1), які містять два довільні елементи, тобто функції f і V . Ця класифікація може розглядатись як попередня, оскільки ми не розглядали додаткові перетворення еквівалентності, що не належать до групи $S(2)$.

Автор висловлює подяку проф. А. Г. Нікітіну за цінні зауваження до роботи.

Цитована література

1. Miller Jr. W., Post S., Winternitz P. Classical and quantum superintegrability with applications // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – **46**, No 42. – 423001.
2. Нікітін А. Г., Засадко Т. М. Групова класифікація рівнянь Шродінгера зі змінною масою // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **11**, № 1. – Р. 228–240.
3. Nikitin A. G., Zasadko T. N. Superintegrable systems with position dependent mass // J. Math. Phys. – 2015. – **56**. – 042101.
4. Nikitin A. G. New exactly solvable systems with Fock symmetry // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – **45**. – 485204.
5. Нікітін А. Г. Узагальнені тензори Кілінга довільного рангу та порядку // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – Р. 786–795.
6. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. – Москва: Наука, 1983. – 360 с.
7. Фушчич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.

References

1. Miller Jr. W., Post S., Winternitz P. J. Phys. A: Math. Theor., 2013, **46**: 423001.
2. Nikitin A. G., Zasadko T. N. Zbirnyk prats' Institutu Matematyky NAN Ukrainy, 2014, **11**: 228–240 (in Ukrainian).
3. Nikitin A. G., Zasadko T. N. J. Math. Phys., 2015, **56**: 042101.
4. Nikitin A. G. J. Phys. A: Math. Theor., 2012, **45**: 485204.
5. Nikitin A. G. Ukr. Math. J., 1991, **43**: 734–743.
6. Zhelubenko D. P., Shtern A. I. Representation of Lie groups, Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
7. Fushchich V. I., Barannik L. F., Barannik A. F. Subgroup analysis of Galilei and Poincaré groups and reduction of nonlinear equations, Kiev: Naukova Dumka, 1991 (in Russian).

*Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка*

Надійшло до редакції 02.12.2014

Т. М. Засадко

Групповая классификация уравнений Шредингера с переменной массой для двумерного случая

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Прокласифицированы интегралы движения первого порядка для уравнений Шредингера с переменной массой. Указано восемь классов уравнений с неэквивалентной симметрией. Они включают в себя интегрируемые, суперинтегрируемые и максимально суперинтегрируемые системы. Полный набор решений одной из этих систем представлен в явном виде.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, гамильтонианы, интегралы движения, интегрируемые системы, суперинтегрируемые системы, максимально суперинтегрируемые системы, алгебра Ли.

T. M. Zasadko

Group analysis of two-dimensional Schrödinger equations with variable mass

Taras Shevchenko National University of Kiev

The first-order integrals of motion for Schrödinger equations with variable mass are classified. Eight classes of such equations with non-equivalent symmetries are specified. They include integrable, superintegrable, and maximally superintegrable systems. A complete set of solutions for one of these systems is presented explicitly.

Keywords: Schrödinger equation, Hamiltonians, integrals of motion, integrated systems, superintegrable systems, maximally superintegrable systems, Lie algebra.