



УДК 536.24

А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов, О. П. Демьянченко

Численно-аналитическое моделирование и идентификация нестационарного теплового процесса с учетом радиационного теплообмена

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. Л. Шубенко)

На базе совместного применения метода прямых, итерационного и структурно-разностного метода предлагается численно-аналитический подход к решению обратных нелинейных нестационарных задач теплопроводности по идентификации как степени черноты поверхности тела, так и температуры окружающей среды. Данный подход позволяет в условиях неизвестной степени черноты поверхности тела или неизвестной температуры окружающей среды при наличии данных вычислительного или теплофизического эксперимента для температуры во внутренних точках области эффективно проводить моделирование теплового процесса во всей области с точным учетом нестационарного радиационно-конвективного теплообмена.

Актуальность разработки новых численно-аналитических подходов к моделированию и идентификации процессов теплопроводности в теплоизлучающих телах связана с необходимостью повышения качественного уровня результатов решения важных технических задач. К ним относятся: определение теплофизических параметров, моделирование тепловых процессов при отливке массивных тел и остывании тел в вакууме. Часто при решении практических задач теплотехники отсутствует информация об изменении во времени степени черноты поверхности тела и температуры окружающей среды. При этом имеется возможность с помощью теплофизического эксперимента определить температуру во внутренних точках тела и путем решения соответствующих обратных задач теплопроводности проводить одновременно идентификацию недостающей информации в граничном условии Стефана–Больцмана и моделирование теплового процесса в теплоизлучающем теле.

Идентификацию степени черноты поверхности тела и температуры окружающей его среды сведем к решению следующей обратной задачи теплопроводности:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad -d < x < d, \quad t > 0, \quad (1)$$

© А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов, О. П. Демьянченко, 2015

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha(T - T_{\text{cp}}) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_{\text{cp}}^4), \quad x = -d, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_{\text{cp}}) + \varepsilon \sigma(T^4 - T_{\text{cp}}^4), \quad x = d, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad -d < x < d, \quad (4)$$

$$T(x_k, t_s) = T_{ks}, \quad k = \overline{1, n_e}, \quad s = \overline{1, m_e}, \quad (5)$$

где $T(x, t)$ — температура; $T_{\text{cp}}(t)$ — температура окружающей среды; T_0 — начальная температура; x — пространственная координата; t — время; $\varepsilon(t)$ — степень черноты поверхности тела; σ — постоянная Стефана–Больцмана; α — коэффициент теплоотдачи с поверхности тела; λ — коэффициент теплопроводности; c — удельная теплоемкость; ρ — плотность материала; $2d$ — линейный размер тела; n_e, m_e — количество точек по пространству и по времени соответственно, в которых задана температура; T_{ks} — данные вычислительного или теплофизического эксперимента. В первом случае считаем, что функция $T_{\text{cp}}(t)$ задана, а функция $\varepsilon(t)$ неизвестна. Во втором случае неизвестной является функция $T_{\text{cp}}(t)$.

В предлагаемом в работе численно-аналитическом подходе к решению обратной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности методом прямых [1] задача (1)–(5) сводится для каждого момента времени к последовательности обратных нелинейных стационарных задач. Применение итерационного метода Ньютона [2] позволяет обратные нелинейные стационарные задачи свести на каждой итерации к соответствующим обратным линейным стационарным задачам. Для решения полученных таким образом обратных линейных стационарных задач теплопроводности в работе применяется структурно-разностный метод [3–5].

Введем сетку по временной переменной: $t_l = l\Delta t$, $l = \overline{0, m}$, $\Delta t = \tau/m$, где τ — конечное время процесса; Δt — шаг по временной переменной; m — целое положительное число.

В уравнении (1) заменим производную по времени разностной производной [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta t},$$

где T^l , $l = \overline{0, m}$, — распределение температуры в l -й момент времени.

Тогда краевая задача (1)–(4) примет следующий вид:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c\rho \frac{T^{l+1} - T^l}{\Delta t}, \quad -d < x < d, \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial T^{l+1}}{\partial x} = \alpha(T^{l+1} - T_{\text{cp}}) + \varepsilon \sigma[(T^{l+1})^4 - T_{\text{cp}}^4], \quad x = -d, \quad (7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T^{l+1}}{\partial x} = \alpha(T^{l+1} - T_{\text{cp}}) + \varepsilon \sigma[(T^{l+1})^4 - T_{\text{cp}}^4], \quad x = d, \quad (8)$$

$$T^0 = T_0(x), \quad -d < x < d, \quad (9)$$

где $l = \overline{0, m}$.

Введем пространственную сетку по переменной x следующим образом: $x_i = ih$, $i = \overline{-n_x, n_x}$, $h = d/n_x$, где n_x — целое положительное число; $2n_x + 1$ — количество узлов

сетки; h — шаг сетки. Тогда нелинейную прямую краевую задачу (6)–(9) можно переписать в разностном виде [1]:

$$\lambda \frac{T_{i+1}^{l+1} - 2T_i^{l+1} + T_{i-1}^{l+1}}{h^2} - \frac{c\rho}{\Delta t} T_i^{l+1} = -\frac{c\rho}{\Delta t} T_i^l, \quad -n_x + 1 < i < n_x - 1, \quad (10)$$

$$\lambda \frac{-3T_{-n_x}^{l+1} + 4T_{-n_x+1}^{l+1} - T_{-n_x+2}^{l+1}}{2h} = \alpha(T_{-n_x}^{l+1} - T_{\text{cp}}) + \varepsilon\sigma[(T_{-n_x}^{l+1})^4 - T_{\text{cp}}^4], \quad (11)$$

$$-\lambda \frac{T_{n_x-2}^{l+1} - 4T_{n_x-1}^{l+1} + 3T_{n_x}^{l+1}}{2h} = \alpha(T_{n_x}^{l+1} - T_{\text{cp}}) + \varepsilon\sigma[(T_{n_x}^{l+1})^4 - T_{\text{cp}}^4], \quad (12)$$

$$T_i^0 = T_0(x_i), \quad i = \overline{-n_x, n_x}, \quad (13)$$

где T_i^l , $i = \overline{-n_x, n_x}$, $l = \overline{0, m}$, — узловые значения температуры в l -й момент времени.

Четвертую степень температуры в граничных условиях (11), (12) представим в виде $T_{p+1}^4 = \gamma T_p^3 T_{p+1} - (\gamma - 1) T_p^4$. Здесь p — номер итерации; γ — параметр итерационного метода. Для метода Ньютона имеем $\gamma = 4$, а при $\gamma = 1$ — простые итерации. Теперь задачу (10)–(13) можно представить как последовательность линейных краевых задач на каждом временном шаге

$$\frac{\lambda}{h^2} T_{i-1,p-1}^{l+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{c\rho}{\Delta t} \right) T_{i,p-1}^{l+1} + \frac{\lambda}{h^2} T_{i+1,p-1}^{l+1} = -\frac{c\rho}{\Delta t} T_i^l, \quad -n_x + 1 < i < n_x - 1, \quad (14)$$

$$\left[\frac{3\lambda}{2h} + \alpha + \varepsilon\sigma\gamma(T_{-n_x,p}^{l+1})^3 \right] T_{-n_x,p-1}^{l+1} - \frac{2\lambda}{h} T_{-n_x+1,p-1}^{l+1} + \frac{\lambda}{2h} T_{-n_x+2,p-1}^{l+1} =$$

$$= \alpha T_{\text{cp}} + \varepsilon\sigma((\gamma - 1)(T_{-n_x,p}^{l+1})^4 + T_{\text{cp}}^4), \quad (15)$$

$$\frac{\lambda}{2h} T_{n_x-2,p-1}^{l+1} - \frac{2\lambda}{h} T_{n_x-1,p-1}^{l+1} + \left(\frac{3\lambda}{2h} + \alpha + \varepsilon\sigma\gamma(T_{n_x,p-1}^{l+1})^3 \right) T_{n_x,p-1}^{l+1} =$$

$$= \alpha T_{\text{cp}} + \varepsilon\sigma((\gamma - 1)(T_{n_x,p-1}^{l+1})^4 + T_{\text{cp}}^4), \quad (16)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots; \quad T_{i,0}^{l+1} = T_i^l, \quad i = \overline{-n_x, n_x}, \quad l = \overline{0, m},$$

где $T_{i,p}^l$ — значение температуры в i -м узле пространственной сетки на p -й итерации в момент времени l .

Представим решение краевой задачи теплопроводности (6)–(9) в виде линейной комбинации полиномов Чебышева $\{\phi_j\}_{j=0}^n$: $T^{l+1} = \sum_{j=0}^n C_j^{l+1} \phi_j(x)$ и подставим эту структуру решения вместо узловых значений температуры в разностную схему (14)–(16). Тогда получим для каждого временного шага $(l+1)$ и на каждой $(p+1)$ -й итерации систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_{j,p+1}^{l+1}$, $j = \overline{0, n}$:

$$\sum_{j=0}^n C_{j,p+1}^{l+1} \left[\frac{\lambda}{h^2} \phi_{j,i-1} - \left(\frac{2\lambda}{h^2} + \frac{c\rho}{\Delta t} \right) \phi_{j,i} + \frac{\lambda}{h^2} \phi_{j,i+1} \right] = \frac{c\rho}{\Delta t} T_i^l, \quad -n_x + 1 < i < n_x - 1, \quad (17)$$

$$\sum_{j=0}^n C_{j,p+1}^{l+1} \left\{ \left[\frac{3\lambda}{2h} + \alpha + \varepsilon\sigma\gamma(T_{-n_x,p}^{l+1})^3 \right] \phi_{j,-n_x} - \frac{2\lambda}{h} \phi_{j,-n_x+1} + \frac{\lambda}{2h} \phi_{j,-n_x+2} \right\} =$$

$$= \alpha T_{\text{cp}} + \varepsilon\sigma((\gamma - 1)(T_{-n_x,p}^{l+1})^4 - T_{\text{cp}}^4), \quad (18)$$

$$\sum_{j=0}^n C_{j,p+1}^{l+1} \left\{ \frac{\lambda}{2h} \phi_{j,n_x-2} - \frac{2\lambda}{h} \phi_{j,n_x-1} + \left[\frac{3\lambda}{2h} + \alpha + \varepsilon \sigma \gamma (T_{n_x,p}^{l+1})^3 \right] \phi_{j,n_x} \right\} =$$

$$= 2T_{\text{cp}} + \varepsilon \sigma ((\gamma - 1)(T_{n_x,p}^{l+1})^4 + T_{\text{cp}}^4), \quad (19)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$; $C_{j,0}^{l+1} = C_j^l$, $j = \overline{0, n}$, $l = \overline{0, m}$, $\varphi_{j,i}$ — значение полинома Чебышева на i -м узле пространственной сетки. Здесь C_j^0 , $j = \overline{0, n}$, — коэффициенты разложения по полиномам Чебышева начального значения температуры (4) $T_0(x) = \sum_{j=0}^n C_j^0 \varphi_j(x)$.

Система линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей (17)–(19) относительно неизвестных $C_{j,p+1}^{l+1}$, $j = \overline{0, n}$, решалась методом наименьших квадратов.

При решении обратной задачи (1)–(4) в каждой пространственной точке x_k , $k = \overline{1, n_e}$, определялась сплайн-интерполяция заданной температуры (5) по временной переменной в виде $Sp_k(t)$, $k = \overline{1, n_e}$, [3] с использованием интерполяционных данных $\{t_s, T_{ks}\}_{s=1}^{m_e}$.

Для вычисления значений степени черноты и температуры среды в отдельные моменты времени t_{l+1} в рамках разностной схемы (17)–(19) введем в рассмотрение следующие регулярные сетки: сетку по переменной ε в виде

$$\omega_\varepsilon = \left\{ \varepsilon_i : \varepsilon_i = \varepsilon_{\min} + i\Delta\varepsilon, i = \overline{0, n_\varepsilon}, \Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{n_\varepsilon} \right\},$$

где $\varepsilon_{\min}$, $\varepsilon_{\max}$ — минимальное и максимальное значения степени черноты в данный момент времени; $n_\varepsilon > 0$ — целое число, и аналогичную сетку по переменной T_{cp} в виде

$$\omega_T = \left\{ T_{\text{cp},j} : T_{\text{cp},j} = T_{\text{cp},\min} + j\Delta T_{\text{cp}}, j = \overline{0, n_T}, \Delta T_{\text{cp}} = \frac{T_{\text{cp},\max} - T_{\text{cp},\min}}{n_T} \right\},$$

где $T_{\text{cp},\min}$, $T_{\text{cp},\max}$ — минимальное и максимальное значения температуры среды в этот же момент времени t_{l+1} ; $n_T > 0$ — целое число.

В каждой пространственной точке x_k , $k = \overline{1, n_e}$, в которой задана температура (5), определим сплайн-интерполяцию на сетке $\omega_\varepsilon \times \omega_T$ функции температуры в зависимости от двух переменных ε и T_{cp} , которую обозначим выражением $Sp_k^{l+1}(\varepsilon, T_{\text{cp}})$, $k = \overline{1, n_e}$ [3]. Поиск значений ε и T_{cp} осуществляется путем минимизации функционала
$$\min_{\substack{\varepsilon \in [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}] \\ T_{\text{cp}} \in [T_{\text{cp},\min}, T_{\text{cp},\max}]}} J^{l+1}(\varepsilon, T_{\text{cp}}),$$

где функционал имеет вид:

$$J^{l+1}(\varepsilon, T_{\text{cp}}) = \sum_{k=1}^{n_e} [Sp_k^{l+1}(\varepsilon, T_{\text{cp}}) - Sp_k(t_{l+1})]^2 + \{q^{l+1} - \alpha[Sp_{n_x}(t_{l+1}) - T_{\text{cp}}] -$$

$$- \varepsilon \sigma [(Sp_{n_x}(t_{l+1}))^4 - T_{\text{cp}}^4]\}^2.$$

Здесь в выражение функционала входит поток q^{l+1} на поверхности тела в данный момент времени, который вычисляется по значениям аппроксимации заданной температуры в трех соседних точках:

$$q^{l+1} = -\lambda \frac{Sp_{n_x-2}(t_{l+1}) - 4Sp_{n_x-1}(t_{l+1}) + 3Sp_{n_x}(t_{l+1})}{2h}.$$

Очевидно, что для данного подхода как минимум в трех точках x_{n_x-2} , x_{n_x-1} , x_{n_x} необходимо задавать температуру в условии задачи (5).

Построим аналитическую структуру решения задачи теплопроводности (1)–(4), точно удовлетворяющую граничным условиям (2), (3), в виде

$$T = \Phi - \omega \frac{d\Phi}{dx} \frac{d\omega}{dx} + \omega \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda} (\Phi^4 - T_{\text{ср}}^4) + \omega \frac{\alpha}{\lambda} (\Phi - T_{\text{ср}}), \quad (20)$$

где $T = T(x, t)$, $\Phi = \Phi(x, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $T_{\text{ср}} = T_{\text{ср}}(t)$, $\omega(x) = (d^2 - x^2)(2d)^{-1}$.

Так как $T|_{x=\pm d} = \Phi$ и $-\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=d} = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=-d} = \frac{\varepsilon\sigma}{\lambda}(\Phi^4 - T_{\text{ср}}^4) + \frac{\alpha}{\lambda}(\Phi - T_{\text{ср}})$, то при подстановке этих результатов в граничные условия (2) и (3) получим их точное удовлетворение при любых заданных зависимостях времени и координат $\varepsilon(t)$, $\alpha(t)$, $T_{\text{ср}}(t)$ и $\Phi(x, t)$.

Эти универсальные качественные особенности структуры решения (20) задачи (1)–(4) позволяют ее эффективно использовать как при математическом моделировании многообразия нестационарных тепловых процессов с учетом радиационно-конвективного теплообмена, так и при идентификации температуры внешней среды и степени черноты поверхности тела. Функция $\Phi(x, t)$ для каждого момента времени представляется в виде функционального ряда по полиномам Чебышева или В-сплайнам с неопределенными коэффициентами.

При выполнении роли точного решения модельной задачи функция $\Phi(x, t)$ может быть представлена в виде ограниченных непрерывно-дифференцируемых функций, что позволяет с помощью структуры решения (20) моделировать многообразие температурных полей в области исследования. Для двумерных и трехмерных задач в структуре решения (20) функции $\omega(x, y)$ и $\omega(x, y, z)$ строятся с помощью S -функций [5] и точно учитывают геометрическую идентификацию. Функция источника энергии в уравнении теплопроводности для модельной задачи определяется так, чтобы структура (20) решения задачи точно удовлетворяла уравнению теплопроводности. Начальное условие в модельной задаче определяется структурой решения (20) при $t = 0$.

При проведении вычислительного эксперимента в структуре решения (20) функция $\Phi(x, t)$ выбиралась в виде $\Phi(x, t) = 500 \exp(-x^2 t)$, зависимости во времени $\varepsilon(t)$ и $T_{\text{ср}}(t)$ — в виде $\varepsilon(t) = 1 - \exp(-t)$; $T_{\text{ср}}(t) = 1000 + 0,1045 t$ К при $0 \leq t \leq 8333$ с; $T_{\text{ср}}(t) = 1873$ К при $t > 8333$ с.

Обратная задача (1)–(5) решалась для следующих исходных данных:

$$T_0(x) = 281 \text{ К}, \quad d = 0,25 \text{ м}, \quad \alpha = 109,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}, \quad \lambda = 27,4 \frac{\text{Вт}}{\text{мК}}, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4},$$

$c\rho = 4566666,66 \text{ Дж}/(\text{м}^3\text{К})$. На рис. 1, 2 приведены результаты по восстановлению степени черноты в первом варианте и температуры среды во втором варианте как функций времени для модельной задачи для следующих исходных данных: $n^* = 1$, $x_1 = 1,0$, $m^* = 100$, $m = 500$, $n^* = 1$.

На рис. 1 непрерывная линия — точное значение степени черноты поверхности тела, определяемое функцией $\varepsilon(t) = 1 - e^{-t}$, точками отмечены идентифицированные значения. На рис. 2 непрерывная линия — точное значение температуры окружающей среды, определяемое функцией $T_{\text{ср}} = \begin{cases} 1000 + 0,1045t \text{ К}, & 0 \leq t \leq 8333 \text{ с}, \\ 1873 \text{ К}, & t > 8333 \text{ с}, \end{cases}$ точками отмечены идентифицированные значения.

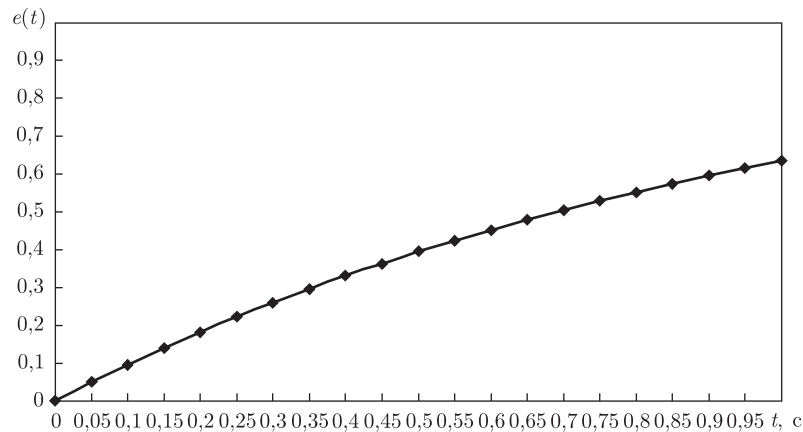


Рис. 1. Идентифицированные значения степени черноты поверхности тела для модельной задачи

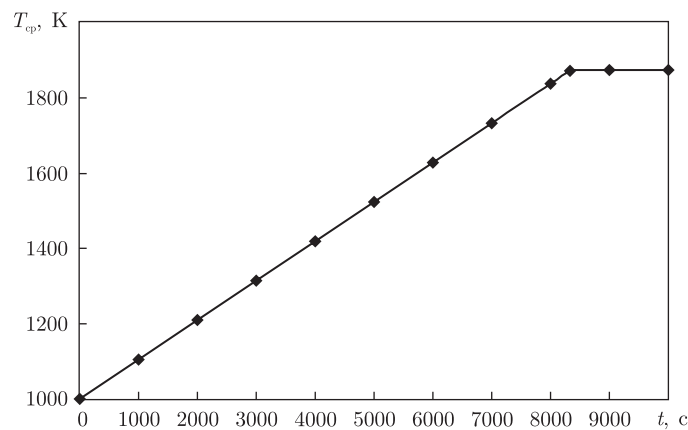


Рис. 2. Идентифицированные значения температуры окружающей среды

Качественные возможности структуры решения (20) задачи (1)–(4) позволяют впервые проводить анализ достоверности полученных результатов в процессе численно-аналитического моделирования нелинейных нестационарных тепловых процессов с учетом нестационарного радиационно-конвективного теплообмена.

Данный подход дает возможность решать в реальном масштабе времени обратные задачи теплопроводности при моделировании нестационарных тепловых процессов с учетом радиационно-конвективного теплообмена в конструктивных элементах при неполной информации о температуре окружающей среды или степени черноты поверхности тела в условиях радиационно-конвективного теплообмена.

1. Самарский А. А., Вабичевич П. Н. Вычислительная теплопередача. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.
3. Мацевитый Ю. М., Слесаренко А. П. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляция их решений. – Киев: Наук. думка, 2014. – 293 с.
4. Слесаренко А. П., Кобринович Ю. О. Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности конструктивных элементов // Доп. НАН України. – 2012. – № 1. – С. 82–88.

5. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм // Вост.-Европ. журн. передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55) – С. 4–10.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков
Азовский морской институт Одесской
национальной морской академии, Мариуполь*

Поступило в редакцию 05.12.2014

А. П. Слесаренко, М. О. Сафонов, О. П. Демьянченко

Чисельно-аналітичне моделювання та ідентифікація нелінійного теплового процесу з урахуванням нестационарного радіаційного теплообміну

На базі спільного застосування методу прямих, ітераційного та структурно-різницевого методу пропонується чисельно-аналітичний підхід до розв'язання зворотних нелінійних нестационарних задач теплопровідності з ідентифікації як ступеня чорноти поверхні тіла, так і температури навколишнього середовища. Даний підхід дозволяє в умовах невідомого ступеня чорноти поверхні тіла або невідомої температури навколишнього середовища при наявності даних обчислювального або теплофізичного експерименту для температури у внутрішніх точках області ефективно проводити моделювання теплового процесу у всій області з точним урахуванням нестационарного радіаційно-конвективного теплообміну.

A. P. Slesarenko, M. O. Safonov, O. P. Demyanchenko

Numerical-analytical modeling and identification of a nonlinear thermal process with regard for nonstationary radiative heat exchange

On the basis of the joint application of the method of lines and the iterative structure-difference method, a numerical-analytical approach to the solution of inverse problems of nonlinear time-dependent thermal conductivity is proposed with the identification of the emissivity of the surface of the body and the ambient temperature. This approach allows one, for the unknown emissivity of the surface of the body or the unknown ambient temperature in the presence of data of computing or thermophysical experiments for the temperature in the interior of the area, to effectively carry out the simulation of the thermal process in the entire region with the accurate account for the unsteady radiative-convective heat transfer.