УДК 539.3

Д. М. Максимчук

Розв'язання контактної задачі для попередньо напруженого шару та двох співвісних пружних штампів з початковими (залишковими) напруженнями

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

В рамках лінеаризованої теорії пружності наведено осесиметричну задачу про тиск двох співвісних циліндричних штампів з початковими напруженнями, що тиснуть на шар з початковими напруженнями. Дослідження подано у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

Контактну задачу про тиск двох циліндрів на шар з початковими (залишковими) напруженнями досліджено в роботах [1, 2], детальний огляд яких подано в [3–5]. Вплив початкових напружень у пружному шарі при його контактній взаємодії з пружними співвісними штампами розглянуто у [6, 7], а дослідження контактної взаємодії попередньо напруженого скінченного штампа на шар з початковими напруженнями наведено у роботах [8, 9].

У даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності [1, 6, 7] розв'язується осесиметрична статична задача про тиск двох скінченних співвісних циліндричних штампів з початковими напруженнями на пружний шар з початковими напруженнями. Дослідження виконано в загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл у випадку теорії великих (кінцевих) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу [6, 7, 10–12].

Поряд з лагранжевими координатами (x_1, x_2, x_3), які у природному стані збігаються з декартовими, введемо декартові координати (y_1, y_2, y_3) початкового стану. Зв'язок між декартовими та лагранжевими координатами запишемо у вигляді $E_i = C_i\lambda_V^{-1}$ $(V = 1, 2, 3)$, де λ_V — коефіцієнти видовження, які визначають переміщення початкового напружено-деформовного стану.

Розглянемо початковий напружено-деформовний стан для ізотропного тіла при $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Крім того, у випадку осесиметричної задачі будуть використані циліндричні координати $(r,\ \theta,\ y_i)$ або $(r,\ \theta,\ z_i)$, де $z_i = y_3 n_i^{-0,5}$ $(i = 1, 2)$.

Постановка задачі та граничні умови. Розглянемо пружний шар товщиною $2h_1$ $(h_1 = \lambda_1 h_2)$, де h_2 — товщина шару до виникнення там початкових напружень. Припустимо, що зовнішні сили прикладені до вільних торців пружних штампів так, що їхні точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на величину ε відносно площини $y_3 = 0$, а між штампами і шаром тертя відсутнє. Приймемо, що пружні потенціали — двічі неперервно-деформовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна [10], початкові напружено-деформовні стани яких ідентичні. Всі дослідження будемо проводити в координатах початкового стану (y_1, y_2, y_3). Компоненти вектора переміщення та тензора деформацій, які відносяться до круглих циліндрів з початковими напруженнями, позначатимемо, як у роботах [6, 7], для верхнього та нижнього циліндра відповідно індексами (1) і (2), а для пружного шару індекси будуть відсутні.

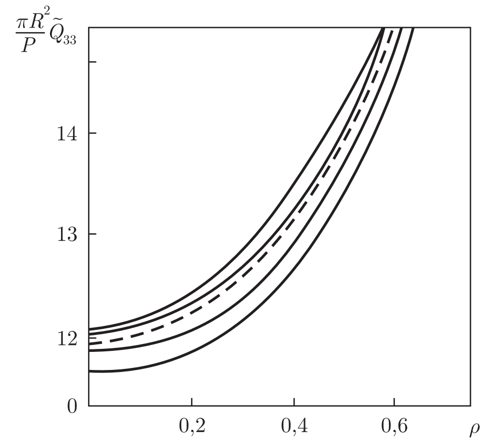

Рис. 1

Нехай пружний необмежений шар з початковими напруженнями деформується під дією тиску двох співвісних попередньо напружених циліндричних штампів (рис. 1) однакової висоти і радіусів. Зовнішнє навантаження P викликає переміщення вільних торців у напрямку осі симетрії. Бокові поверхні штампів, а також поверхні шару за межею контакту вільні від зовнішніх зусиль. В області контакту тіл дотичними зусиллями нехтуємо.

Вважаючи, що пружні штампи виготовлені із різних ізотропних, трансверсально-ізотропних матеріалів, а переміщення торців штампів задано величинами ε_+ і ε_- — для визначення складових вектора переміщення і тензора напруження у пружних штампах і шарі, маємо такі граничні умови:

на торцях пружних штампів з початковими напруженнями

$$u_z^{(1)} = -\varepsilon_+; \qquad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \qquad \forall\,(r) \in [0, R_1], \qquad y_3 = h + H_1, \tag{1}$$

$$u_z^{(2)} = -\varepsilon_-; \qquad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \qquad \forall\,(r) \in [0, R_2], \qquad y_3 = -h - H_2, \tag{2}$$

на боковій поверхні пружних штампів

$$\sigma_z^{(1)} = 0; \qquad \tau_{rz}^{(1)} = 0; \qquad \forall\,(y_3) \in [0, H_1], \qquad r = R_1, \tag{3}$$

$$\sigma_z^{(2)} = 0; \qquad \tau_{rz}^{(2)} = 0; \qquad \forall\,(y_3) \in [0, H_2], \qquad r = R_2, \tag{4}$$

на межі пружного шару в області контакту

$$u_3 = u_z^{(1)}; \qquad \widetilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(1)}; \qquad \widetilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(1)} = 0, \qquad \forall\,(r) \in [0, R_1], \qquad y_3 = -h_1, \tag{5}$$

$$u_3 = u_z^{(2)}; \qquad \widetilde{Q}_{33} = \sigma_z^{(2)}; \qquad \widetilde{Q}_{3r} = t_{rz}^{(2)} = 0, \qquad \forall\,(r) \in [0, R_2], \qquad y_3 = -h_2, \tag{6}$$

на межі пружного шару поза областю контакту

$$\widetilde{Q}_{33} = \widetilde{Q}_{3r} = 0, \qquad \forall\,(r) \in [r, +\infty], \qquad y_3 = \pm h. \tag{7}$$

Умови рівноваги приводять до рівності

$$\int\limits_0^{R_1} \rho Q_{33}(0,\rho)|_{y_3=h_1} d\rho = \int\limits_0^{R_2} \rho Q_{33}(0,\rho)|_{y_3=h_2} d\rho.$$

Рівнодіюча зовнішніх сил визначається рівністю

$$P = -2\pi \int\limits_0^{R_1} \rho Q_{33}(0,\rho)|_{y_3=h_1} d\rho = -2\pi \int\limits_0^{R_2} \rho Q_{33}(0,\rho)|_{y_3=h_2} d\rho.$$

Загальний розв'язок $\widetilde{\chi} = \widetilde{\chi}_1 + \widetilde{\chi}_2$ для випадку нерівних коренів $n_1 \neq n_2$ будемо шукати у вигляді

$$\widetilde{\chi} = r^2(2A_0 + 3C_0(z_1+z_2)) - 2A_0(z_1^2+z_2^2) - 2C_0(z_1^3+z_2^3) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty}\{[A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k z_2 v_2)] + J_0(\alpha_k r)[S_2(\alpha_k z_1) + \\ + S_3(\alpha_k z_2)]\},$$

де $I_0(x)$, $J_0(x)$ — функції Бесселя; $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, C_k, A_k, B_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k — невідомі коефіцієнти.

Згідно з [10], знайдемо ϕ_t, $i = 1, 2$. Тоді обчислимо $\phi_1 = -\partial\widetilde{\chi}_1/(v_1 \partial z_1)$, $\phi_2 = -\partial\widetilde{\chi}_2/(v_2 \partial z_2)$:

$$\widetilde{\phi}_1 = -4A_0 z_1 v_1^{-1} + 3C_0 v_1^{-1}(2z_1^2 - r^2) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \gamma_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_6(\gamma_k z_1 v_1) + \alpha_k v_1^{-1} J_0(\alpha_k r) S_4(\alpha_k z_1)],$$

$$\widetilde{\phi}_2 = -4A_0 z_2 v_2^{-1} + 3C_0 v_2^{-1}(2z_2^2 - r^2) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty}[B_k \gamma_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_6(\gamma_k z_2 v_2) + \alpha_k v_2^{-1} J_0(\alpha_k r) S_5(\alpha_k z_2)],$$

де $S_4 = E_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1) + F_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_5 = N_k \mathrm{ch}(\alpha_k z_1) + M_k \mathrm{sh}(\alpha_k z_1)$, $S_6 = C_k \cos(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \sin(\gamma_k v_1 z_1)$, та, спираючись на [10], компоненти напружено-деформовного стану:

$$u_r^{(i)} = -6C_0 r\theta_+ - \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^2[A_k v_1 I_1(v_1\gamma_k r) S_6(\gamma_k z_1 v_1) + B_k v_2 I_1(v_2 \gamma_k r) S_6(\gamma_k z_2 v_2)] - \\ - \alpha_k^2 J_1(\alpha_k r)(S_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + S_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1})\},$$

$$u_3^{(i)} = 12C_0[m_1 z_1 n_1^{-1} + m_2 z_2 n_2^{-1}] - 4A_0\theta_8 + \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^2[A_k m_1 I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k z_1 v_1) + \\ + B_k m_2 I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k z_2 v_2)] - \alpha_k^2 J_0(\alpha_k r)(m_1 S_2(\alpha_k z_1) n_1^{-1} + m_2 S_3(\alpha_k z_2) n_2^{-1})\},$$

$$\sigma_z^{(i)} = C_{44}(1+m_1) l_1 \Big\langle 12C_0[v_1^{-1} + s v_2^{-1}] + \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^3[A_k n_1 I_0(\gamma_k v_1 r) S_6(\gamma_k z_1 v_1) + \\ + s n_2 B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_6(\gamma_k z_2 v_2)] - \alpha_k^3 J_0(\alpha_k r)(S_4(\alpha_k z_1) v_1^{-1} + s S_5(\alpha_k z_2) v_2^{-1})\}\Big\rangle, \qquad (8)$$

$$\tau_{3r}^{(i)} = C_{44}(1+m_1)\sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^3[A_k v_1 I_1(\gamma_k v_1 r)S_1(\gamma_k z_1 v_1) + s_0 B_k v_2 I_1(\gamma_k v_2 r)S_1(\gamma_k z_2 v_2)] +$$
$$+ \alpha_k^3 J_1(\alpha_k r)[n_1^{-1}S_2(\alpha_k z_1) + s_0 n_2^{-1}S_3(\alpha_k z_2)]\},$$

де $\theta_+ = v_1^{-1} + v_2^{-1}$, $\theta_8 = m_1 n_1^{-1} + m_2 n_2^{-1}$.

Напружено-деформовний стан у пружному шарі з початковими (залишковими) напруженнями для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$ визначимо через гармонійні функції у вигляді інтегралів Ханкеля. Задовольнивши граничні умови (1)–(7), усі невідомі коефіцієнти, як і в [7], виразимо через один, наприклад B_2, та введемо позначення $G(\eta) = \eta^3 B_2 R^{-3}(1 - q(\eta))^{-1}$, де $q(\eta)$ визначається граничними умовами (1)–(7)

$$u_3 = \theta_1\left(\int_0^{\infty}\frac{G(\eta)}{\eta}J_0(\eta\rho)d\eta - \int_0^{\infty}\frac{G(\eta)}{\eta}q(\eta h)J_0(\eta\rho)\,d\eta\right),$$
$$Q_{33} = \theta_2\int_0^{\infty}G(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta, \qquad Q_{3r} = 0. \tag{9}$$

Тут $h = h_i/R$, $\phi_i = 2\eta h v_i^{-1}$, $\theta_1 = m_1(s_1 - s_0)v_1^{-1}$, $\theta_2 = C_{44}l_1(1+m_1)\kappa$.

Формули (8), (9) одержані в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл, а значення коефіцієнтів n_1, n_2, m_1, m_2, C_{44}, l_1, l_2, s_1, s_0 для стисливих і нестисливих тіл наведені у [7, 10].

Метод розв'язання. Використовуючи розв'язки для циліндра з (8) і задовольняючи граничні умови (1)–(7), знаходимо власні значення задачі:

$$\gamma_k = \pi(2k+1)H^{-1}J_1(\alpha_k R) = 0, \qquad \alpha_k = \mu_k R^{-1}.$$

Не зупиняючись на викладках, скажемо, що невідома функція $G(\eta)$, що входить у вирази вектора переміщень і тензора напружень для попередньо напруженого шару, визначається в результаті зведення задачі до системи парних інтегральних рівнянь, з яких одержимо систему двох інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду, для розв'язання якої застосовуємо метод послідовних наближень [7, 10]. Цей метод є збіжним, враховуючи дослідження, проведені у [7]. Тому розв'язок подано у вигляді рядів через нескінченну систему констант, які визначаються з нескінченної регулярної системи [7] лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$l_k^{(i)}\chi_n^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} l_{kn}^{(i)}\chi_n^{(i)} = d_k^{(i)}. \tag{10}$$

Коефіцієнти системи (10) наведені для стисливих і нестисливих тіл у випадку нерівних коренів у вигляді

$$l_0^{(i)} = d_0 = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}q(hu)\psi_{j-1}(u,0)\,du\right],$$

$$l_{0n}^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left[-\theta_4\psi_0(0,\mu_n) + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}q(hu)\psi_{j-1}(u,\mu_n)\,du\right],$$

$$l_{k0}^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left[-\theta_4\psi_0(0,\mu_k) + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}(\psi_{j-1}(u,\mu_k)q(hu)\psi_0(u,0)\,du)\right]; \qquad l_{00}^{(i)} = \frac{\theta_5\theta_1 RE}{\kappa l},$$

$$d_k = \frac{2}{\pi}\left[\psi_0(0,\mu_k) + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi_{j-1}(u,\mu_k)q(hu)\psi_0(u,0)\,du\right],$$

$$l_k = \frac{\theta_1\mu_k J_0^2(\mu_k)}{2\kappa R v_1}\left[\frac{l_2 v_2}{l_1 v_1}\operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{v_2}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{v_1}\right)\right],$$

$$l_{kn}^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left[-\theta_4\psi_0(\mu_k,\mu_n) - \frac{2\theta_1 s_0 v_1 R\pi}{\kappa l}\sum_{m=1}^{\infty}\tau_{mn}\iota_{km} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}(\psi_0(u,\mu_n)q(hu)\psi_{j-1}(u,\mu_k)\,du)\right],$$

де

$$\tau_{mn} = \frac{J_0(\mu_n)\left[\dfrac{\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_1 R)^2} - \dfrac{v_2}{v_1 s_0}\dfrac{\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_0}{\mu_n^2 + (\gamma_m v_2 R)^2}\right]}{\gamma_m^3 I_1(\gamma_k v_2 R)[v_2 W_m(2) - v_1 s_0 W_m(1)]},$$

$$\iota_{kn} = I_1(\gamma_k v_2 R)\gamma_k^4 J_0(\mu_n)\left[\frac{l_2 v_2}{l_1(\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_2^2 R^2)} - \frac{v_1}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 v_1^2 R^2}\right].$$

Визначивши невідомі константи χ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ з (10), можна обчислити силу P, переміщення і напруження у пружних штампах та шарі з початковими напруженнями за формулами (8), (9).

Чисельний розв'язок. Коефіцієнти системи (10), що залежать від структури пружного потенціалу, при зростанні k спадають за абсолютною величиною порівняно з елементами головної діагоналі, що задовольняє умову квазірегулярності. Тому система (10) була розв'язана методом редукції при таких значеннях параметрів: $k = 16$, $E^{(i)} = 3{,}92$, $v = 0{,}5$, $l = 10$, $h = 4$, $\lambda_1 = 0{,}7$–$1{,}2$ у випадку потенціалу Трелоара.

Графіки на рис. 1, 2 побудовані за формулами (8), (9) і відповідають нерівним кореням. Штрихова лінія — випадок без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$). На рис. 1 наведено контактні напруження, які виникають у зоні контакту циліндрів та шару, а на рис. 2 — контактні переміщення.

Отже, на основі підрахунків можна зробити такі висновки: початкові напруження в шарі і циліндрах приводять до зменшення контактних напружень у випадку стиску, у випадку розтягу — до їх зростання. Для переміщень при ідентичних початкових і залишкових напруженнях відмічається ефект "резонансного характеру" не тільки в шарі, але і в пружних штампах з початковими (залишковими) напруженнями.

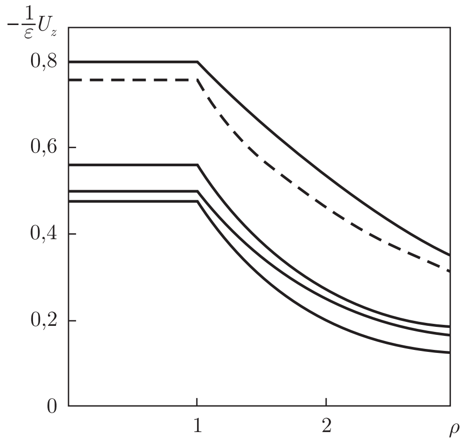

Рис. 2

1. *Григоренко П. П. Рудницький В. Б.* Слой с начальными напряжениями под действием двух жестких штампов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 9. – С. 35–38.
2. *Рудницький В. Б.* Контактна взаємодія попередньо напруженого шару з двома пружними штампами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 56–60.
3. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudsnitsky V. B.* Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No 5. – P. 343–371.
4. *Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B.* Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No 7. – P. 744–765.
5. *Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Рудницкий В. Б.* Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями // Развитие идей Л. А. Галина в механике. – Москва; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
6. *Гузь А. Н., Рудницкий В. Б.* Контактные задачи для упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: Изд-во "ПП Мельник", 2004. – 682 с.
7. *Гузь А. Н., Рудницкий В. Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницкий: Изд-во "ПП Мельник", 2006. – 710 с.
8. *Ярецька Н. О.* Вплив початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружного циліндричного штампу та пружного шару // Доп. НАН України. – 2014. – № 1. – С. 57–62.
9. *Yaretskaya N. A.* Three-dimensional contact problem for an elastic layer and a cylindrical punch with prestresses // Intern. Appl. Mech. – 2014. – **50**, Iss. 4. – P. 378–388.
10. *Неклассические* проблемы механики разрушения. В 4 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1991. – Т. 2. – 288 с.
11. *Рудницкий В. Б.* Влияние начальных напряжений в слое на контактное давление при взаимодействии с цилиндрическим штампом // Прикл. мех. – 1987. – **23**, № 8. – С. 11–19.
12. *Кизыма Я. М.* Давление упругого цилиндра на упругий слой конечной толщины // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. – 1972. – № 3. – С. 68–72.

Хмельницький національний університет

Надійшло до редакції 21.10.2014

Д. Н. Максимчук

Решение контактной задачи для предварительно напряженного слоя и двух соосных упругих штампов с начальными (остаточными) напряжениями

В рамках линеаризованной теории упругости приводится осесиметрическая задача о давлении двух соосных цилиндрических штампов с начальными напряжениями, которые давят на слой с начальными напряжениями. Исследования представлены в общем виде для теории больших начальных деформаций и двух вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала.

D. N. Maksymchuk

Solution of a contact problem for the prestressed layer and two coaxial elastic punches with initial (residual) stresses

The article deals with the coaxial type problem of pressure of two cylindrical coaxial punches with residual stresses upon a layer with residual stresses within the framework of a linearized theory of elasticity. The research is carried out for the theory of finite deformations and two variants of the theory of small initial deformations with the elastic potential having arbitrary form.