УДК 519.214.7

М. В. Миронюк

Про випадкові блукання на дискретних абелевих групах

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Отримані необхідні та достатні умови рекурентності випадкових блукань на групах p-ічно раціональних чисел $H_p = \{m/p^n \colon n = 1, 2, \ldots; m \in \mathbb{Z}\}$.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — імовірнісний простір, X — зліченна дискретна абелева група, μ — розподіл на X. Нагадаємо, що випадковим блуканням на групі X, породженим розподілом μ, називається послідовність

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

де ξ_j — незалежні однаково розподілені з розподілом μ випадкові величини, визначені на $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ зі значеннями в X. Випадкове блукання на групі X називається рекурентним, якщо всі елементи групи X рекурентні, тобто для будь-якого $x \in X$ виконано

$$P\{\omega \in \Omega \colon S_n(\omega) = x \text{ для нескінченної кількості індексів } n \in \mathbf{N}\} = 1.$$

Позначимо через $\mathbb{Z}$ групу цілих чисел, через $\mathbb{Q}$ — групу раціональних чисел, що розглядається в дискретній топології, через $\mathbb{Z}(k)$ — циклічну групу порядку k. Р. Дадлі (див. [1]) довів, що на зліченній групі X існує рекурентне випадкове блукання тоді і лише тоді, коли X не містить підгрупи, ізоморфної $\mathbb{Z}^3$. Внаслідок теореми Р. Дадлі виникає природна задача знаходження умов рекурентності випадкових блукань для дискретних груп, які не містять $\mathbb{Z}^3$. Такі умови вивчались:

(a) на слабкому прямому добутку $\mathbb{Z}(2)^{\aleph_0 *}$ [2];
(b) на слабкому прямому добутку $\mathbf{P}^*_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(k_i)$ [3];
(c) на фактор-групі $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ та її підгрупах [3];
(d) на слабкому прямому добутку $\mathbb{Z}(k)^{\aleph_0 *}$ [4];
(e) на групах p-ічно раціональних чисел $H_p = \{m/p^n \colon n = 1, 2, \ldots; m \in \mathbb{Z}\}$ [4];
(f) на групі виду $\mathbb{Z}^k \times \mathbf{P}^*_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}(k_i)$ [5].

Нехай X — локально компактна абелева група, яка задовольняє другу аксіому зліченності, $Y = X^*$ — група характерів групи X, (x, y) — значення характеру $y \in Y$ на елементі $x \in X$. Нехай

$$\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y)\, d\mu(x) \quad -$$

характеристична функція розподілу μ на X. Позначимо через m_X міру Хаара на групі X. В роботі [6] С. Кестен та Ф. Спіцер довели такий критерій рекурентності випадкового блукання на дискретній абелевій групі:

Теорема A [6]. *Нехай X — зліченна дискретна абелева група. Нехай μ — розподіл на групі X. Випадкове блукання, породжене розподілом μ, рекурентне тоді і лише тоді, коли*

$$\int\limits_Y \mathrm{Re}\frac{1}{1-\widehat{\mu}(y)}dm_Y = \infty. \tag{1}$$

У випадках груп виду (b), (c), (d), (f) автори відповідних статей при отриманні необхідних та достатніх умов рекурентності випадкових блукань використовували теорему A. У цих випадках групи характерів відповідних груп мають досить просту структуру.

Випадок (e) більш складний. Автори статті [4] стверджують, що теорема A некорисна для отримання необхідних та достатніх умов рекурентності випадкових блукань на групі X, якщо її група характерів Y має складну структуру, як, наприклад, для групи p-iчно раціональних чисел H_p. У цьому випадку група Y — це p-адичний соленоїд. В [4] необхідні та достатні умови рекурентності випадкових блукань на групі H_p були отримані без застосування теореми A.

У цій роботі, застосовуючи теорему A, ми знаходимо необхідні та достатні умови рекурентності випадкових блукань на групі p-iчно раціональних чисел H_p. Ці результати іншим чином були отримані в [4].

У роботі використовуються деякі результати теорії двоїстості Понтрягіна (див. [7]).

Для того щоб застосовувати теорему A, нагадаємо опис групи характерів групи H_p.

Нехай Δ_p — група цілих p-адичних чисел. Розглянемо локально компактну абелеву групу $\mathbb{R}\times\Delta_p$. Нехай $\mathbf{u} = (1,0,0,\ldots,0,\ldots) \in \Delta_p$, а B — підгрупа $\{(n,n\mathbf{u}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в $\mathbb{R}\times\Delta_p$. Фактор-група $\Sigma_p = \mathbb{R}\times\Delta_p/B$ називається p-адичним соленоїдом. Група Σ_p компактна та зв'язна (див. [7, § 10]). Група Σ_p топологічно ізоморфна групі характерів групи H_p (див. [7, § 25.3]).

Позначимо через $\mathbb{T}$ групу обертів кола (одновимірний тор), тобто $\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$. Нам в роботі зручно використовувати іншу реалізацію p-адичного соленоїда як підгрупу нескінченновимірного тора $\mathbb{T}^{\aleph_0}$.

Розглянемо гомоморфізм $f\colon \mathbb{R}\times\Delta_p \longrightarrow \mathbb{T}^{\aleph_0}$, який визначається формулою

$$f(t,\mathbf{y}) \longmapsto z = (z_1, z_2, \ldots), \qquad z_j = \exp\left(\frac{2\pi i}{p^j}(t-(y_0+py_1+\cdots+p^{j-1}y_{j-1}))\right),$$

де $t\in\mathbb{R}$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots) \in \Delta_p$.

Не складно перевірити, що f — неперервний гомоморфізм, $\mathrm{Ker}\, f = B$ и $G = \mathrm{Im} f = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{T}^{\aleph_0} : z_k^p = z_{k-1}\}$ — замкнена підгрупа в нескінченновимірному торі $\mathbb{T}^{\aleph_0}$. Тоді $G \cong \Sigma_p$.

Реалізація p-адичного соленоїда Σ_p у вигляді підгрупи

$$G = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{T}^{\aleph_0}\colon z_k^p = z_{k-1}\}$$

дає можливість легко перевірити таке: якщо $h = m/p^n$ — довільний характер групи Σ_p, то $(z,h) = z_{n+1}^m$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots) \in G$.

Розглянемо групу $X = H_p$. Зазначимо, що числа

$$e_{\pm 0} = \pm 1, \qquad e_{\pm 1} = \pm\frac{1}{p}, \qquad e_{\pm 2} \pm \frac{1}{p^2}, \qquad \ldots, \qquad e_{\pm n} = \pm\frac{1}{p^n}, \qquad \ldots$$

є природними твірними групи X.

Розглянемо на X розподіл μ виду

$$\mu\{e_{\pm j}\} = \frac{q_j}{2}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1, \qquad q_j \geqslant 0, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Розподіл μ визначає деяке випадкове блукання на X.

У нижчеподаній теоремі 1 отримані достатні умови рекурентності випадкового блукання, породженого розподілом μ, на групі $X = H_p$.

Теорема 1. *Нехай $X = H_p$. Нехай μ — розподіл на X виду* (2). *Умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n \sqrt{q_n + q_{n+1} + \cdots}} = \infty$$

достатня для рекурентності випадкового блукання, породженого розподілом μ на X.

У наведеній далі теоремі 2 отримані необхідні умови рекурентності випадкового блукання, породженого розподілом μ, на групі $X = H_p$.

Нам потрібна така добре відома властивість характеристичних функцій (див., наприклад, [8, § 2]):

Лема 1. *Нехай X — локально компактна абелева група, яка задовольняє другу аксіому зліченності, μ — розподіл на X. Еквівалентними є такі умови:*

(i) носій розподілу μ не міститься в жодному класі суміжності групи X за деякою підгрупою;

(ii) $\{y \in Y \colon |\widehat{\mu}(y)| = 1\} = \{0\}$.

Теорема 2. *Нехай $X = H_p$. Нехай μ — розподіл на X виду* (2)*. Ми будемо передбачати, що в* (2) *всі $q_j > 0$. Умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n \sqrt{q_n}} = \infty$$

необхідна для рекурентності випадкового блукання, породженого розподілом μ на X.

Як було зазначено вище, теореми 1 та 2 були доведені в [4]. Наше доведення принципово відрізняється, тому що ми використовуємо теорему A. Коротко опишемо основну ідею доведення теорем 1 та 2.

Група характерів групи X топологічно ізоморфна групі Σ_p. Щоб не ускладнювати позначень, будемо вважати, що $Y = \Sigma_p$. Нам зручно розглядати реалізацію a-адичного соленоїда як підгрупи в $\mathbb{T}^{\aleph_0}$. Тоді елементами групи Y є послідовності $y = (y_1, y_2, \ldots)$, де $y_n \in \mathbb{T}$, $y_n^p = y_{n-1}$. Покладемо $y_n = e^{ib_n}$. Таким чином, послідовності $(y_1, y_2, \ldots)$ відповідає деяка послідовність $(b_1, b_2, \ldots)$. Числа b_n визначені за модулем 2π. Ми будемо брати ці числа або з інтервалу $[0, 2\pi)$, або з інтервалу $[-\pi, \pi)$ залежно від того, як нам буде зручно. Незалежно від того, в якому інтервалі ми братимемо точки b_n, непорозумінь виникати не буде. Зазначимо, що

$$a_{n+1} b_{n+1} = b_n \pmod{2\pi}.$$

Зазначимо також, що $(e_{\pm j}, y) = e^{\pm i b_{j+1}} = \cos b_{j+1} \pm i \sin b_{j+1}$. Тоді

$$\widehat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y) d\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j (e_j, y) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j (e_{-j}, y) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \cos b_{j+1}.$$

Для компактної групи Y будемо вважати, що міра Хаара m_Y нормована так, що $m_Y(Y) = 1$.

Основна ідея доведення полягає в тому, щоб побудувати в p-адичному соленоїді Σ_p систему множин E_0, $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, які не перетинаються та для яких

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_Y(E_n) = 1.$$

Покладемо

$$E_0 = \left\{y \in Y : b_1 \notin \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right]\right\}.$$

Використовуючи інваріантність міри Хаара, отримуємо

$$m_Y(E_0) = \frac{p-1}{p}.$$

Зазначимо, що

$$Y \setminus E_0 = \left\{y \in Y : b_1 \in \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right], b_2 \in \left[\frac{2\pi k}{p} - \frac{\pi}{p^2}, \frac{2\pi k}{p} + \frac{\pi}{p^2}\right] (k = 0, 1, \ldots, p-1), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, b_n \in \left[\frac{2\pi k}{p^{n-1}} - \frac{\pi}{p^n}, \frac{2\pi k}{p^{n-1}} + \frac{\pi}{p^n}\right] (k = 0, 1, \ldots, p-1), \ldots\right\}.$$

Покладемо

$$E_1 = \left\{y \in Y \setminus E_0 : b_2 \notin \left[-\frac{\pi}{p^2}, \frac{\pi}{p^2}\right]\right\} =$$
$$= \left\{y \in Y \setminus E_0 : b_1 \in \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right], b_2 \in \left[\frac{2\pi k}{p} - \frac{\pi}{p^2}, \frac{2\pi k}{p} + \frac{\pi}{p^2}\right] (k = 1, \ldots, p-1)\right\}.$$

Легко бачити, що $m_Y(E_1) = \dfrac{p-1}{p^2}$.

За індукцією визначаємо послідовність множин

$$E_n = \left\{y \in Y \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} E_j : b_{n+1} \notin \left[-\frac{\pi}{p^{n+1}}, \frac{\pi}{p^{n+1}}\right]\right\}. \tag{3}$$

Насправді множини E_n можна визначити за допомогою тільки координати b_{n+1}. Для кращого розуміння зазначимо, що

$$E_n = \left\{y \in Y : b_{n+1} \in \left[\frac{2\pi k}{p} - \frac{\pi}{p^{n+1}}, \frac{2\pi k}{p} + \frac{\pi}{p^{n+1}}\right] (k = 1, \ldots, p-1)\right\} =$$
$$= \left\{y \in Y \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} E_j : b_1 \in \left[-\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{p}\right], b_2 \in \left[-\frac{\pi}{p^2}, \frac{\pi}{p^2}\right], \ldots, b_n \in \left[-\frac{\pi}{p^n}, \frac{\pi}{p^n}\right],\right.$$
$$\left. b_{n+1} \in \left[\frac{2\pi k}{p} - \frac{\pi}{p^{n+1}}, \frac{2\pi k}{p} + \frac{\pi}{p^{n+1}}\right] (k = 1, \ldots, p-1)\right\}.$$

Використовуючи (3) та інваріантність міри Хаара, не складно за індукцією перевірити, що

$$m_Y(E_n) = \frac{p-1}{p^{n+1}}$$

для всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$.

За побудовою ми отримали, що $E_i \bigcap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ та

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_Y(E_n) = 1.$$

Далі оцінюємо на кожній з множин E_n функцію $\widehat{\mu}(y)$. Потім отримаємо оцінки знизу та зверху інтеграла (1).

Зауваження 1. Аналізуючи доведення теорем 1 та 2, ми вважаємо, що аналогічні результати можуть бути отримані також на довільних підгрупах групи раціональних чисел.

1. *Dudley R. M.* Random walks on abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – **13**. – P. 447–450.
2. *Darling D. A., Erdos P.* On the recurrence of a certain chain // Ibid. – 1968. – **19**. – P. 336–338.
3. *Flatto L., Pitt J.* Recurrence criteria for random walks on countable abelian groups // Ill. J. Math. – 1974. – **18**. – P. 1–19.
4. *Ферейг Н., Молчанов С. А.* О случайных блужданиях на абелевых группах бесконечным числом образующих // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1978. – № 5. – С. 22–29.
5. *Касымджанова М. А.* Возвратность инвариантных цепей Маркова на одном классе абелевых групп // Там же. – 1981. – № 3. – С. 3–7.
6. *Kesten S., Spitzer F.* Random walk on countably infinite abelian groups // Acta. Math. – 1965. – **114**. – P. 237–265.
7. *Hewitt E., Ross K. A.* Abstract harmonic analysis. Vol. 1. – Berlin; Gottingen; Heildelberg: Springer, 1963. – 519 p.
8. *Feldman G. M.* Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups. – Zürich: European Math. Society, 2008. – 256 p. – (Tracts in Mathematics; Vol. 5).

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 13.11.2014

М. В. Миронюк

О случайных блужданиях на дискретных абелевых группах

Получены необходимые и достаточные условия возвратности случайных блужданий на группах p-ично рациональных чисел $H_p = \{m/p^n \colon n = 1, 2, \ldots; m \in \mathbb{Z}\}$.

M. V. Myronyuk

Random walks on discrete Abelian groups

We find the necessary and sufficient conditions for the recurrence of random walks on groups of the form $H_p = \{m/p^n \colon n = 1, 2, \ldots; m \in \mathbb{Z}\}$.