Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

4 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 512.53+512.57

Ю. В. Жучок

Об определимости свободных триоидов полугруппами эндоморфизмов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. А. Дроздом)

Доказано, что полугруппы эндоморфизмов двух свободных триоидов изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие свободные триоиды изоморфны.

Понятие триоида было введено Ж.-Л. Лодэ и М. О. Ронко в [1] для изучения тернарных плоских деревьев. Алгебра $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с тремя бинарными ассоциативными операциями $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$ называется *триоидом*, если для всех x, y, $z \in T$ выполняются следующие условия:

(T_1) $\quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$,

(T_2) $\quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$,

(T_3) $\quad (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$,

(T_4) $\quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z)$,

(T_5) $\quad (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z)$,

(T_6) $\quad (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z)$,

(T_7) $\quad (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z)$,

(T_8) $\quad (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$.

Триалгебры и триоиды, которые являются основой триалгебр, изучались в различных работах (см., например, [2–4]). Хорошо известно, что понятие триоида тесно связано с понятием димоноида [5]. Напомним, что непустое множество T с двумя бинарными ассоциативными операциями $\dashv$ и $\vdash$, удовлетворяющими аксиомам (T_1)–(T_3), называется димоноидом. Димоноиды играют важную роль при решении актуальных проблем теории алгебр Лейбница. Заметим, что если операции триоида или димоноида совпадают, то он становится полугруппой. Таким образом, триоиды и димоноиды являются обобщением полугрупп. Более общую информацию о триоидах, димоноидах, а также их различные примеры можно найти, в частности, в [1, 5–7].

Одной из классических задач алгебры, которую впервые рассматривал Э. Галуа (следуя словам С. Улама [8]), является проблема определимости математической структуры полугруппой своих эндоморфизмов. Пусть $\mathrm{End}(A)$ — полугруппа эндоморфизмов алгебраической системы A. Что можно сказать о системах A и B, если полугруппа $\mathrm{End}(A)$ изоморфна $\mathrm{End}(B)$? Эта проблема изучалась многими авторами. Существует целый ряд алгебраических систем, свойства которых определяются их полугруппами эндоморфизмов (см., например, [9–11]). Проблема определимости для свободных алгебр в наперед заданном многообразии была поставлена Б. И. Плоткиным [12] в его лекциях по универсальной алгебраической геометрии. Решение этой проблемы для свободных групп было получено Е. Форманеком [13]. Для свободных полугрупп и свободных моноидов проблему определимости решили Г. Машевицкий и Б. М. Шайн [14]. В данной работе мы доказываем определимость свободных триоидов своими полугруппами эндоморфизмов.

1. Свободный триоид. Пусть $\mathfrak{T}_1 = (T_1, \dashv_1, \vdash_1, \perp_1)$ и $\mathfrak{T}_2 = (T_2, \dashv_2, \vdash_2, \perp_2)$ — произвольные триоиды. Отображение $\varphi\colon T_1 \to T_2$ называется *гомоморфизмом* $\mathfrak{T}_1$ в $\mathfrak{T}_2$, если для всех $x, y \in T_1$

$$(x \dashv_1 y)\varphi = x\varphi \dashv_2 y\varphi, \qquad (x \vdash_1 y)\varphi = x\varphi \vdash_2 y\varphi, \qquad (x \perp_1 y)\varphi = x\varphi \perp_2 y\varphi.$$

Биективный гомоморфизм $\varphi\colon T_1 \to T_2$ называется *изоморфизмом* $\mathfrak{T}_1$ на $\mathfrak{T}_2$. В этом случае триоиды $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ называются *изоморфными*.

Пусть X — произвольное непустое множество, $\overline{X} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$ и $Ft^+(X)$ — свободная полугруппа на множестве $X \bigcup \overline{X}$. Через $Ft(X)$ обозначим подмножество из $Ft^+(X)$, которое состоит из слов, содержащих в своей записи по крайней мере один символ $\overline{x}$ ($x \in X$). Для каждого $w \in Ft(X)$ через $\widetilde{w}$ обозначим слово, полученное из w заменой каждого элемента $\overline{x}$, $x \in X$, на x. Допустим, если $w = x\overline{x}x\overline{x}xy\overline{z}$, то $\widetilde{w} = xxxxxyz$.

На множестве $Ft(X)$ определим три бинарные операции по правилам:

$$u \dashv v = u\widetilde{v}, \qquad u \vdash v = \widetilde{u}v, \qquad u \perp v = uv.$$

Предложение 1. *Алгебраическая система $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ является свободным триоидом.*

Доказательство. Понятно, что операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$ являются ассоциативными. Кроме того, для всех u, v, $w \in Ft(X)$ выполняются аксиомы триоида (T_1)–(T_8):

$$(u \dashv v) \dashv w = u\widetilde{v}\widetilde{w} = u\widetilde{\widetilde{v}w} = u \dashv (v \vdash w),$$

$$(u \vdash v) \dashv w = \widetilde{u}v\widetilde{w} = u \vdash (v \dashv w),$$

$$(u \dashv v) \vdash w = \widetilde{u\widetilde{v}}w = \widetilde{u}\widetilde{v}w = u \vdash (v \vdash w),$$

$$(u \dashv v) \dashv w = u\widetilde{v}\widetilde{w} = u\widetilde{vw} = u \dashv (v \perp w),$$

$$(u \perp v) \dashv w = uv\widetilde{w} = u \perp (v \dashv w),$$

$$(u \dashv v) \perp w = u\widetilde{v}w = u \perp (v \vdash w),$$

$$(u \vdash v) \perp w = \widetilde{u}vw = u \vdash (v \perp w),$$

$$(u \perp v) \vdash w = \widetilde{uv}w = \widetilde{u}\widetilde{v}w = u \vdash (v \vdash w).$$

Покажем теперь, что триоид $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ — свободный. Аналогично представлению элементов свободного триоида ранга 1 (см. лемму 1.10 в [1]), произвольный элемент $w \in$ $\in Ft(X)$ представляется одним из следующих двух способов:

$$w = u_1^{(0)} u_2^{(0)} \cdots u_{k_0}^{(0)} \overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \cdots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \cdots u_{k_2}^{(2)} \cdots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \cdots u_{k_j}^{(j)} =$$
$$= (\overline{u_1^{(0)}} \vdash \cdots \vdash \overline{u_{k_0}^{(0)}}) \vdash (\overline{u_1^{(1)}} \dashv \cdots \dashv \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp \cdots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \dashv \cdots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

где $u_l^{(i)} \in X$, $1 \leqslant l \leqslant k_i$ для всех $i \in \{0, 1, \ldots, j\}$, или

$$w = \overline{u_1^{(1)}} u_2^{(1)} \cdots u_{k_1}^{(1)} \overline{u_1^{(2)}} u_2^{(2)} \cdots u_{k_2}^{(2)} \cdots u_{k_{j-1}}^{(j-1)} \overline{u_1^{(j)}} u_2^{(j)} \cdots u_{k_j}^{(j)} =$$
$$= (\overline{u_1^{(1)}} \dashv \cdots \dashv \overline{u_{k_1}^{(1)}}) \perp (\overline{u_1^{(2)}} \dashv \cdots \dashv \overline{u_{k_2}^{(2)}}) \perp \cdots \perp (\overline{u_1^{(j)}} \dashv \cdots \dashv \overline{u_{k_j}^{(j)}}),$$

где $u_l^{(i)} \in X$, $1 \leqslant l \leqslant k_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$.

Пусть $(T', \dashv', \vdash', \perp')$ — произвольный триоид. Каждый гомоморфизм Φ свободного триоида $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ в триоид $(T', \dashv', \vdash', \perp')$ однозначно определяется отображением $\varphi\colon \overline{X} \to T'$. Для того чтобы задать Φ, достаточно для указанных выше двух видов $w \in$ $\in Ft(X)$ положить

$$w\Phi = (\overline{u_1^{(0)}}\varphi \vdash' \overline{u_2^{(0)}}\varphi \vdash' \cdots \vdash' \overline{u_{k_0}^{(0)}}\varphi) \vdash' (\overline{u_1^{(1)}}\varphi \dashv' \overline{u_2^{(1)}}\varphi \dashv' \cdots \dashv' \overline{u_{k_1}^{(1)}}\varphi) \perp' \perp' \cdots$$
$$\perp' (\overline{u_1^{(j)}}\varphi \dashv' \overline{u_2^{(j)}}\varphi \dashv' \cdots \dashv' \overline{u_{k_j}^{(j)}}\varphi)$$

и

$$w\Phi = (\overline{u_1^{(1)}}\varphi \dashv' \overline{u_2^{(1)}}\varphi \dashv' \cdots \dashv' \overline{u_{k_1}^{(1)}}\varphi) \perp' (\overline{u_1^{(2)}}\varphi \dashv' \overline{u_2^{(2)}}\varphi \dashv' \cdots \dashv' \overline{u_{k_2}^{(2)}}\varphi) \perp' \perp' \cdots$$
$$\perp' (\overline{u_1^{(j)}}\varphi \dashv' \overline{u_2^{(j)}}\varphi \dashv' \cdots \dashv' \overline{u_{k_j}^{(j)}}\varphi).$$

Далее доказательство этого утверждения является точно таким же, как и доказательство соответствующего утверждения для свободного триоида ранга 1 (см. предложение 1.9 в [1]).

Элементы из $Ft(X)$ называются *словами*, а $\overline{X}$ является *порождающим множеством* свободного триоида $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$. Через $|\omega|$ мы обозначаем *длину* слова $\omega \in Ft(X)$. В частности, для $X = \{x\}$ имеем

$$Ft(X) = \{\overline{x}, \overline{x}x, x\overline{x}, \overline{x}\overline{x}, \overline{x}xx, x\overline{x}x, xx\overline{x}, \overline{x}\overline{x}x, x\overline{x}\overline{x}, \overline{x}x\overline{x}, \overline{x}\overline{x}\overline{x}, \ldots\}.$$

Заметим, что эндоморфизм Φ свободного триоида $(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ на произвольном множестве X является автоморфизмом тогда и только тогда, когда ограничение Φ на X принадлежит симметрической группе $S(X)$ на множестве X. Итак, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ изоморфна группе $S(X)$.

2. Определимость. Говорят, что алгебраическая система A из некоторого класса Ω *определяется* с точностью до изоморфизма своей полугруппой эндоморфизмов в классе Ω, если для любой алгебраической системы $B \in \Omega$ из того, что $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}(B)$, следует $A \cong B$. Заметим, справедливость обратной импликации очевидна.

Пусть $\mathfrak{F}_X = (Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ — свободный триоид на множестве X и $u \in Ft(X)$. Эндоморфизм $\theta_u \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ назовем *константным*, если $\overline{x}\theta_u = u$ для всех $\overline{x} \in \overline{X}$.

Лемма 2. *(i) Для всех $u \in Ft(X)$, $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ имеем $\theta_u f = \theta_{uf}$.*

(ii) Эндоморфизм f свободного триоида $\mathfrak{F}_X$ является константным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда $\psi f = f$ для всех $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$.

(iii) Эндоморфизм f свободного триоида $\mathfrak{F}_X$ является константным идемпотентным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда $f = \theta_{\overline{x}}$ для некоторого $\overline{x} \in \overline{X}$.

Доказательство. (i) Пусть $u \in Ft(X)$ и $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$. Тогда для всех $\overline{x} \in \overline{X}$ получаем

$$\overline{x}(\theta_u f) = (\overline{x}\theta_u)f = uf = \overline{x}\theta_{uf}.$$

(ii) Предположим, что эндоморфизм $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ константный, и пусть $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$. Тогда $f = \theta_u$ для некоторого $u \in Ft(X)$, при этом

$$\overline{x}(\psi\theta_u) = (\overline{x}\psi)\theta_u = u = \overline{x}\theta_u$$

для всех $\overline{x} \in \overline{X}$. Таким образом, $\psi\theta_u = \theta_u$.

Обратно, допустим $\psi f = f$ для всех $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$ и некоторого $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$. Тогда для фиксированного $\overline{x} \in \overline{X}$ получаем $\overline{x}f = \overline{x}(\psi f) = (\overline{x}\psi)f = \overline{y}f$, где $\overline{y} = \overline{x}\psi$. Поскольку $\{\overline{x}\psi \mid \psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)\} = \overline{X}$, то $\overline{a}f = \overline{b}f$ для всех $\overline{a}$, $\overline{b} \in \overline{X}$. Отсюда следует, что $f = \theta_u$ при $u = \overline{x}f$.

(iii) Пусть $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ — константный идемпотент. Тогда $f = \theta_u$, $u \in Ft(X)$, и согласно утверждению (i) данной леммы $\theta_u = \theta_u\theta_u = \theta_{u\theta_u}$. Это означает, что $u = u\theta_u$, откуда следует $|u| = 1$, т.е. $u \in \overline{X}$.

Обратно, для всех $w \in Ft(X)$ и $\overline{x} \in \overline{X}$ имеем

$$w\theta_{\overline{x}}^2 = (u_1^{(0)}u_2^{(0)}\cdots u_{k_0}^{(0)}\overline{u_1^{(1)}}u_2^{(1)}\cdots u_{k_1}^{(1)}\overline{u_1^{(2)}}u_2^{(2)}\cdots u_{k_2}^{(2)}\cdots\overline{u_1^{(j)}}u_2^{(j)}\cdots u_{k_j}^{(j)})\theta_{\overline{x}}^2 =$$
$$= (\underbrace{xx\cdots x}_{k_0}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_1}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_2}\cdots\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_j})\theta_{\overline{x}} = \underbrace{xx\cdots x}_{k_0}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_1}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_2}\cdots\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_j} = w\theta_{\overline{x}},$$

или

$$w\theta_{\overline{x}}^2 = (\overline{u_1^{(1)}}u_2^{(1)}\cdots u_{k_1}^{(1)}\overline{u_1^{(2)}}u_2^{(2)}\cdots u_{k_2}^{(2)}\cdots\overline{u_1^{(j)}}u_2^{(j)}\cdots u_{k_j}^{(j)})\theta_{\overline{x}}^2 =$$
$$= (\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_1}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_2}\cdots\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_j})\theta_{\overline{x}} = \underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_1}\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_2}\cdots\underbrace{\overline{x}x\cdots x}_{k_j} = w\theta_{\overline{x}}.$$

Следовательно, $\theta_{\overline{x}}^2 = \theta_{\overline{x}}$ и лемма доказана.

Основным результатом работы является такая теорема:

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}_X = (Ft(X), \dashv, \vdash, \perp)$ и $\mathfrak{F}_Y = (Ft(Y), \dashv, \vdash, \perp)$ — свободные триоиды такие, что $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X) \cong \mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$. Тогда триоиды $\mathfrak{F}_X$ и $\mathfrak{F}_Y$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть Ψ — произвольный изоморфизм моноида $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_X)$ на $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$. Согласно утверждению (ii) леммы 2 для некоторого константного эндоморфизма $\theta_{\overline{x}}$, $\overline{x} \in \overline{X}$, свободного триоида $\mathfrak{F}_X$ и для всех $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)$ имеем $\alpha\theta_{\overline{x}} = \theta_{\overline{x}}$. Учитывая, что Ψ есть гомоморфизм, получаем

$$\theta_{\overline{x}}\Psi = (\alpha\theta_{\overline{x}})\Psi = \alpha\Psi\theta_{\overline{x}}\Psi.$$

Поскольку $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_X)\Psi = \mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_Y)$, то по утверждению (ii) леммы 2 приходим к выводу, что $\theta_{\overline{x}}\Psi$ — константный эндоморфизм свободного триоида $\mathfrak{F}_Y$, т. е. $\theta_{\overline{x}}\Psi = \theta_v$ для некоторого $v \in F_Y$. При этом понятно, что θ_v есть идемпотент моноида $\mathrm{End}(\mathfrak{F}_Y)$. Тогда по утверждению (iii) леммы 2 $\theta_v = \theta_{\overline{y}}$ для некоторого $\overline{y} \in \overline{Y}$.

Определим отображение $\xi\colon \overline{X} \to \overline{Y}$, полагая $\overline{x}\xi = \overline{y}$ тогда и только тогда, когда $\theta_{\overline{x}}\Psi = \theta_{\overline{y}}$. Понятно, что ξ — биекция. Таким образом, триоиды $\mathfrak{F}_X$ и $\mathfrak{F}_Y$ изоморфны.

1. *Loday J.-L., Ronco M. O.* Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. – 2004. – **346**. – P. 369–398.
2. *Novelli J.-C., Thibon J. Y.* Construction of dendriform trialgebras // Sci. Paris. – 2006. – **342**, No 6. – P. 365–369.
3. *Casas J. M.* Trialgebras and Leibniz 3-algebras // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2006. – **12**, No 2. – P. 165–178.
4. *Жучок А. В.* Напівретракції тріоїдів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 2. – С. 195–207.
5. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. – Berlin: Springer, 2001. – P. 7–66.
6. *Zhuchok A. V.* Some congruences on trioids // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No 2. – P. 138–145.
7. *Zhuchok Y. V.* Representations of ordered dimonoids by binary relations // Asian-Eur. J. Math. – 2014. – **7**. – 1450006, 13 p.
8. *Ulam S. M.* A collection of mathematical problems. – New York; London: Interscience Publishers, 1960. – 150 p. – (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No 8).
9. *Araujo J., Konieczny J.* Dense relations are determined by their endomorphism monoids // Semigroup Forum. – 2005. – **70**. – P. 302–306.
10. *Глускин Л. М.* Идеалы полугрупп // Матем. сб. – 1961. – **55 (97)**, № 4. – С. 421–448.
11. *Бондарь Е. А., Жучок Ю. В.* Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – **18**, № 1. – С. 21–34.
12. *Plotkin B. I.* Seven lectures on the universal algebraic geometry. – Jerusalem: Inst. of Math. of Hebrew Univ., 2000. – 87 p.
13. *Formanek E.* A question of B. Plotkin about the semigroup of endomorphisms of a free group // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **130**. – P. 935–937.
14. *Schein B. M., Mashevitzky G.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Ibid. – 2003. – **131**, No 6. – P. 1655–1660.

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко

Надійшло до редакції 30.10.2014

Ю. В. Жучок

Про визначеність вільних тріоїдів напівгрупами ендоморфізмів

Доведено, що напівгрупи ендоморфізмів двох вільних тріоїдів ізоморфні тоді й лише тоді, коли відповідні вільні тріоїди ізоморфні.

Yu. V. Zhuchok

On the determinability of free trioids by semigroups of endomorphisms

We prove that the endomorphism semigroups of two free trioids are isomorphic if and only if the corresponding free trioids are isomorphic.