УДК 539.3

В. Г. Карнаухов, В. И. Козлов, Т. В. Карнаухова

Вынужденные колебания анизотропной прямоугольной пластины с пьезосенсорами при учете сдвиговых деформаций

(Представлено академиком НАН Украины В. Д. Кубенко)

Представлена уточненная модель типа Тимошенко для моделирования вынужденных колебаний тонких вязкоупругих анизотропных пластин с распределенными трансверсально-изотропными сенсорами. Получена простая формула для показаний сенсора. Исследовано влияние сдвиговых деформаций на эти показания.

Пьезоэлектрические сенсоры широко используются при исследовании колебаний тонкостенных элементов конструкций [1, 9, 12, 13]. В частности, они применяются при активном демпфировании колебаний тонких пластин и оболочек при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов [4, 5, 7–13], когда к актуатору подводится разность потенциалов, пропорциональная скорости изменения показаний пьезосенсора. При этом в элементе появляется дополнительное затухание, пропорциональное скорости изменения поперечного перемещения тела. Показания пьезосенсора зависят от многих факторов: механических граничных условий, размещения и размеров пьезосенсора, электромеханических характеристик и т. п. Обзор исследований по этому вопросу представлен в работах [7–13].

Для моделирования колебаний тонкостенных элементов с пьезосенсорами используются различного рода гипотезы: Кирхгоффа–Лява, С. П. Тимошенко, А. С. Амбрацумяна и др. Необходимость в привлечении уточненных гипотез возникает при исследовании колебаний анизотропных тонкостенных элементов при немалом отношении толщины к размерам элемента или при существенной разнице в механических характеристиках анизотропного материала, из которого изготовлена пластина.

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи о колебаниях ортотропной прямоугольной пластины с пьезосенсорами при учете деформаций сдвига. Представлено простое выражение для показаний сенсора для трансверсально-изотропной пластины, которое позволяет проанализировать влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезосенсора при вынужденных колебаниях пластины.

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластину толщиной h_0 и размером $a\times b$. Края пластины шарнирно оперты, а на ее внешние поверхности нанесены пьезослои толщиной h_1 с противоположной поляризацией. На эти слои нанесены бесконечно тонкие электроды. На пластину действует равномерно распределенное гармоническое во времени давление $p = P_0 e^{i\omega t}$ с частотой, близкой к резонансной. Для моделирования вынужденных колебаний пластины применяются гипотезы С. П. Тимошенко. Основные соотношения, описывающие колебания указанной пластины, представлены, например, в [6]. Для короткозамкнутых электродов снимаемый с них заряд Q рассчитывается по формуле [12, 13]:

$$Q = \gamma_{31}(h_0 + h_1)\iint\limits_{(s)}(\chi_1 + \chi_2)\,dxdy. \tag{1}$$

Здесь

$$\chi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \qquad \chi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \tag{2}$$

где φ_1, φ_2 характеризуют сдвиг в формуле для сдвиговых деформаций

$$\xi_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1, \qquad \xi_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_2. \tag{3}$$

Уравнения движения таковы [6]:

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} + p(t) = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = 0. \tag{4}$$

Уравнения состояния для ортотропного материала имеют вид

$$\begin{aligned} &M_{11} = D_{11}(\chi_1 + \nu_{21}\chi_2), \qquad M_{22} = D_{22}(\nu_{12}\chi_1 + \chi_2), \\ &H = D_{12}\chi_{12}, \qquad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \qquad T_{23} = B_{23}\eta_{23}. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (2), (3), (5) в (4), получим три уравнения движения относительно w, φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} &B_{13}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + B_{23}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + p = \widetilde{\rho}\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \\ &D_{11}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \nu_{21}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}\right) + D_{12}\left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}\right) - B_{13}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_1\right) = 0, \\ &D_{22}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \nu_{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y}\right) + D_{12}\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}\right) - B_{23}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_2\right) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи и анализ полученных результатов. Для шарнирного опирания торцов пластины решение ищется в виде

$$\begin{aligned} &w = w_{mn}\sin k_m x \sin p_m y, \\ &\varphi_1 = \varphi_{1mn}\cos k_m x \sin p_n y, \qquad \varphi_2 = \varphi_{2mn}\sin k_m x \sin p_n y. \end{aligned} \tag{7}$$

При этом

$$p = P_{mn}\sin k_m x \sin p_m y, \qquad P_{mn} = \frac{16}{abk_m p_n}, \qquad k_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad p_n = \frac{n\pi}{b}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), получим три алгебраических уравнения относительно w_{mn}, φ_{1mn}, φ_{2mn}. Эти уравнения представлены в статье [4]. Для сенсора в них следует положить $M_{mn} = 0$. Тогда

$$\varphi_{1mn} = \frac{\Delta_{13}\Delta_{22} - \Delta_{23}\Delta_{12}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}w_{mn}, \qquad \varphi_{2mn} = \frac{\Delta_{23}\Delta_{11} - \Delta_{13}\Delta_{21}}{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}w_{mn}. \tag{9}$$

Выражения для Δ_{ij} приведены в [4]. При их использовании получим следующие формулы для случая трансверсально-изотропной пластины:

$$\begin{aligned} &\varphi_{1mn} = -\frac{k_m}{1 + c(k_m^2 + p_n^2)}w_{mn}, \\ &\varphi_{2mn} = -\frac{p_n}{1 + c(k_m^2 + p_n^2)}w_{mn} \qquad \left(c = \frac{D}{B'}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (1) получим следующее выражения для снимаемого с сенсора заряда Q:

$$Q_{mn} = -4(h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{\varphi_{1mn}}{p_n} + \frac{\varphi_{2mn}}{k_m}\right). \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) находим

$$Q_{mn} = -4(h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{k_m}{p_n} + \frac{p_n}{k_m}\right)\frac{w_{mn}}{1 + c(k_m^2 + p_n^2)}. \tag{12}$$

Из (6) с использованием (7)–(9) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно w_{mn}:

$$\widetilde{\rho}\ddot{w}_{mn} + A_{mn}^1 w_{mn} - p_{mn} = 0. \tag{13}$$

Выражение для A_{mn}^1 представлено в [4]. Для трансверсально-изотропного материала

$$A_{mn}^1 = D\frac{(k_m^2 + p_n^2)^2}{1 + c(k_m^2 + p_n^2)}. \tag{14}$$

Для периодического во времени движения

$$A_{mn}^1 = \widetilde{A}_{mn}e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Из (13) имеем

$$\widetilde{w}_{mn} = \frac{\widetilde{p}_{mn}}{\widetilde{\Delta}_{mn} - \widetilde{\rho}\omega^2}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (12), находим

$$\widetilde{Q}_{mn} = (h_0 + h_1)\gamma_{31}\left(\frac{k_m}{p_n} + \frac{p_n}{k_m}\right) \times \frac{q_{mn}}{\square_{mn}}. \tag{17}$$

Здесь

$$q_{mn} = 4(h_0 + h_1)\left(\frac{k_m}{p_n} + \frac{p_n}{k_m}\right)p_{mn}, \qquad \square_{mn} = D(k_m^2 + p_n^2)^2 - \widehat{\rho}_{mn}, \tag{18}$$

где

$$\widehat{\rho}_{mn} = \widetilde{\rho}[1 + c(k_m^2 + p_n^2)]. \tag{19}$$

В дальнейшем будем считать c вещественным, так что D и B' имеют один и тот же тангенс угла потерь. Формально выражение для снимаемого с сенсора заряда совпадает с выражением для заряда, полученного с использованием гипотез Киргоффа–Лява, но с заменой плотности $\widetilde{\rho}$ на большую плотность $\widehat{\rho}$.

Для вязко-упругого материала

$$\square_{mn} = \square'_{mn} + \square''_{mn}, \tag{20}$$

где

$$\square'_{mn} = D'(k_m^2 + p_n^2)^2 - \widehat{\rho}\omega^2, \qquad \square''_{mn} = D''(k_m^2 + p_n^2)^2. \tag{21}$$

Из (21) имеем

$$\square'_{mn} = D'(k_m^2 + p_n^2)^2 - \widetilde{\rho}\omega^2 - \widetilde{\rho}c(k_m^2 + p_n^2), \tag{22}$$

так что

$$\square'^{ут}_{mn} = \square'^{кл}_{mn} - \widetilde{\rho}c(k_m^2 + p_n^2).$$

Поэтому

$$\square'^{кл}_{mn} \succ \square'^{ут}_{mn}, \qquad \square''^{кл}_{mn} = \square''^{ут}_{mn}. \tag{23}$$

Из (17) находим

$$|Q| = |q_{mn}| \frac{1}{\sqrt{(\square'^{ут}_{mn})^2 + (\square''^{ут}_{mn})^2}}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что заряд, вычисленный с учетом сдвига, больше заряда, вычисленного по классической теории с использованием гипотез Кирхгоффа–Лява.

На резонансе $\square'_{mn} = 0$ при этом

$$\omega_{pmn} = \sqrt{\frac{D'}{\widehat{\rho}}}(k_m^2 + p_n^2). \tag{25}$$

Таким образом, на резонансной частоте на величину заряда сдвиг не влияет, а частота уменьшается, поскольку $\widehat{\rho} > \widetilde{\rho}$.

1. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 1989. – 290 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. – Т. 5. – Киев: Наук. думка, 1989. – 290 с.
3. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – Т. 4. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с.
4. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.* Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьзоактуаторов при активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. – С. 50–54
5. *Карнаухов В. Г., Жук Я. А., Карнаухова Т. В.* Уточнена термомеханічна модель вимушених гармонічних коливань фізично нелінійної оболонки з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами // Там само. – 2007. – № 5. – С. 70–75.
6. *Луговой П. З., Мейш В. Ф., Штанцель Э. А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Изд.-полиграф. центр "Киев. ун-т", 2005. – 536 с.
7. *Batra R. C., Porfiri M. and Spinello D.* Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems // Smart Mater. Struct. – 2007. – **16**. – P. R23-R31.
8. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluver, 2001. – 384 p.
9. *Encycloedia* of smart materials (by Mel Schwartz). – New York: Wiley, 2002. – 1176 p.
10. *Rao S. S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No 44. – P. 113–123.

11. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Ibid. – 1998. – **51**, No 8. – P. 505–521.
12. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
13. *Tzou H. S.* Piezoelectric shells (distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 400 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
НТУ Украины "Киевский политехнический институт"

Поступило в редакцию 01.10.2014

В. Г. Карнаухов, В. І. Козлов, Т. В. Карнаухова

Вимушені коливання анізотропної прямокутної пластини з п'єзосенсорами при врахуванні зсувних деформацій

Наведено уточнену модель типу Тимошенка для моделювання вимушених коливань тонких в'язкопружних анізотропних пластин з розподіленими трансверсально-ізотропними сенсорами. Одержано просту формулу для показників сенсора. Досліджено вплив зсувних деформацій на ці показники.

V. G. Karnaukhov, V. I. Kozlov, T. V. Karnaukhova

Forced vibrations of an anisotropic rectangular plate with piezosensors with account for shear deformations

Refined Timoshenko' model of vibrations of thin-walled viscoelastic anisotropic plates with distributed transversally isotropic sensors is presented. The simple formula for the sensor indications is obtained. The influence of the shear deformations on the indicators is investigated.