ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2015

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 517.9

А. Л. Гуляницький

Слабкі розв'язки і збіжність методу Гальоркіна для дробового рівняння дифузії

(Представлено членом-кореспондентом НАН України С. І. Ляшком)

Побудовано напівдискретний метод Гальоркіна для дробового за часом рівняння дифузії. Доведено слабку збіжність цього методу у випадку правої частини зі значеннями у негативному просторі за просторовою змінною. Також доведено неперервність розв'язку задачі зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій.

Диференціальні рівняння у частинних похідних з дробовою похідною за часом використовуються для опису ряду фізичних процесів, серед яких можна назвати дифузію у пористих і тріщинуватих середовищах [1, 2], перенесення носіїв заряду в аморфних напівпровідниках [3], а також внутрішньоклітинну дифузію [4]. Ці рівняння одержуються з моделей випадкових блукань з неперервним часом зі степеневою щільністю часу очікування.

Абстрактні теореми розв'язності для дробових еволюційних рівнянь з похідною Рімана–Ліувілля одержано у [5]. Проте застосований метод не пов'язаний з побудовою послідовності наближень, яка збігається до розв'язку початково-крайової задачі, тому проблема побудови й обгрунтування чисельних методів залишається відкритою. Цій проблемі присвячено ряд публікацій, наприклад, [6], а також [7] (для опуклих многогранних областей).

У даній статті обгрунтовано слабку збіжність гальоркінських наближень для слабкої постановки початково-крайової задачі для рівняння дифузії з похідною Капуто, а також встановлено, що розв'язок задачі неперервний за часом зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій.

Основні позначення. Розглянемо задачу

$$ {}^*D_0^\alpha u + \mathcal{A}u = f, \tag{1} $$

$$ u|_{t=0} = 0. \tag{2} $$

Тут $u\colon [0,T] \to H$ — невідома функція зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$; ${}^*D_0^\alpha$ — похідна Капуто порядку α за часом з початком у точці 0; $\alpha \in (0,1)$; $\mathcal{A}$ — еліптичний диференціальний оператор другого порядку, що діє за змінною x:

$$(\mathcal{A}\varphi)(x) = -\sum_{i,j=1}^{N}(a_{ij}(x)\varphi_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\varphi_{x_i} + a(x)\varphi.$$

Припустимо, що оператор $\mathcal{A}$ визначений на просторі $H_0^1(\Omega)$ і задається коерцитивною білінійною формою $a(\cdot,\cdot)$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначимо двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$.

Введемо еволюційні дробові за часом соболєвські простори

$$W_0^{\alpha,p}([0,T],H) = \{u \in L_p([0,T],H) \mid {}^*D_0^\alpha u \in L_p([0,T],H), u(0) = 0\},$$

де H — гільбертів простір, з нормою $\|u\|_{W_0^{\alpha,p}([0,T],H)} = \|{}^*D_0^\alpha u\|_{L_p([0,T],H)}$.

Слабка розв'язність і гальоркінські наближення. Розглянемо випадок негладкої правої частини рівняння.

Означення 1. Слабким розв'язком задачі (1)–(2) з правою частиною $f \in L_p([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ назвемо елемент $u \in L_p([0,T],H_0^1(\Omega)) \bigcap W_0^{\alpha,p}([0,T],H_0^{-1}(\Omega))$, що задовольняє тотожність

$$\langle {}^*D_0^\alpha u(t), v\rangle + a(u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \tag{3}$$

для довільного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in [0,T]$, а також початкову умову $u(0) = 0$.

Зауважимо, що завдяки однорідності початкової умови похідна Капуто збігається з похідної Рімана–Ліувілля. Крім того, сформульоване означення слабкої розв'язності рівносильне строгій L_p-розв'язності [5] у просторі $H_0^{-1}(\Omega)$. Тому при зроблених припущеннях щодо оператора $\mathcal{A}$ справедлива теорема існування та єдиності розв'язку.

Теорема 1. *Для довільного $f \in L_p([0,T],H_0^{-1}(\Omega))$ існує і єдиний слабкий розв'язок задачі* (1)–(2).

Надалі припускатимемо, що $p > 2/\alpha$. Нехай q — таке число, для якого $2/p + 1/q = 1$.

Побудуємо для задачі (1) нестаціонарний проекційний метод. Виберемо базис $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Задля простоти викладення припустимо, що цей базис ортонормований у просторі $L_2(\Omega)$. Розглянемо проекційні задачі

$$\langle {}^*D_0^\alpha u_m(t), w_j\rangle + a(u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j\rangle, \qquad j = 1,\dots,m, \tag{4}$$

з однорідними початковими умовами

$$u_m|_{t=0} = 0.$$

Ці елементи шукатимемо у вигляді $u_m(t) = \sum\limits_{i=1}^{m}\psi_{im}(t)\cdot w_i$; тоді (4) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку з невідомими $\psi_{im}(t)$, $i = 1,\dots,m$, $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} &{}^*D_0^\alpha \psi_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} a(w_i,w_j)\psi_{im}(t) = \langle f(t), w_j\rangle, \qquad j = 1,\dots,m, \\ &\psi_{jm}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Розв'язність цієї системи з правою частиною $F(t) = (\langle f(t), w_j\rangle)_{j=1}^m \in L_2([0,T])^m$ можна встановити, використавши вираз для розв'язання системи з гладкою правою частиною [8] і безпосередньо довівши апріорні нерівності, які дають змогу розширити оператор системи до відображення на $L_2([0,T])^m$.

Лема 1. *Для* $u \in L_2([0,T], H_0^1(\Omega)) \bigcap W_0^{\alpha,2}([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$*, для яких відображення* $t \to \to \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ *абсолютно неперервне на* $[0,T]$*, справедлива нерівність*

$$^*D_0^\alpha \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\langle {}^*D_0^\alpha u(t), u(t)\rangle.$$

Ця лема узагальнює нерівність для скалярнозначних функцій, доведену А. Аліхановим [9]. Доведення в цілому повторюють міркування для цього випадку.

Теорема 2. *Якщо для функцій* u_m *справедлива нерівність з леми 1, то послідовність* (u_m) *збігається до розв'язку задачі* (1)–(2) *слабко в* $L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$ *і* — слабко в* $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$.

Доведення. Домножуючи (5) на $\psi_{jm}(t)$, просумовуючи за $j = 1, \ldots, m$ і використовуючи нерівність Аліханова, одержимо

$$\frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a(u_m(t), u_m(t)) \leqslant \langle {}^*D_0^\alpha u_m(t), u_m(t)\rangle + a(u_m(t), u_m(t)) =$$

$$= \langle f(t), u_m(t)\rangle \leqslant \|f(t)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\|f(t)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)} + \epsilon^2 \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \qquad \epsilon > 0.$$

Перегруповуючи доданки з урахуванням коерцитивності оператора $\mathcal{A}$, тобто нерівності $a(u_m(t), u_m(t)) \geqslant c_0 \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, маємо

$$\frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(c_0 - \frac{\epsilon^2}{2}\right)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2\epsilon^2}\|f(t)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}.$$

Діючи дробово-інтегральним оператором порядку α, вибираючи ϵ з умови $c_0 - \epsilon^2/2 > 0$ і застосовуючи нерівність Юнга для дійсних чисел, одержимо оцінку

$$\|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^t \frac{(2c_0 - \epsilon^2)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \leqslant \int_0^t \frac{\|f(s)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}}{\epsilon^2 (t-s)^{1-\alpha}} ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \frac{\|f(s)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}}{\epsilon^{2p}} ds + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{q(1-\alpha)}} ds \leqslant M$$

(обмеженість останнього інтеграла випливає з припущення $p > 2/\alpha$). Таким чином, для деякого $M = M(\epsilon) > 0$ і майже всіх $t \in [0,T]$

$$\|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant M,$$

$$\int_0^t \frac{\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \leqslant \frac{M}{2c_0 - \epsilon^2}.$$

З цих двох оцінок випливає обмеженість $(u_m)_{m=1}^{\infty}$ у просторах $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$ і $L_2([0,T],H_0^1(\Omega))$. Справді,

$$\frac{2c_0-\epsilon^2}{T^{1-\alpha}}\int\limits_0^t \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{(2c_0-\epsilon^2)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}} \leqslant M.$$

Покладаючи $t=T$, одержуємо

$$\frac{2c_0-\epsilon^2}{T^{1-\alpha}}\int\limits_0^T \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{(2c_0-\epsilon^2)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(T-s)^{1-\alpha}} \leqslant M. \tag{6}$$

Тому існують підпослідовність (u_{m_k}) й елемент $u\in L_\infty([0,T],L_2(\Omega))\bigcap L_2([0,T],H_0^1(\Omega))$, для яких $u_{m_k}\rightharpoonup u$ у $L_2([0,T],H_0^1(\Omega))$ і $u_{m_k}\overset{*}{\rightharpoonup} u$ у $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$.

Помноживши перший доданок (4) на $\varphi\in C^\infty([0,T])$, таке, що $({}_TI^{1-\alpha}\varphi)(t)|_{t=T}=0$ (${}_TI^{1-\alpha}$ — інтегральний оператор Рімана–Ліувілля з кінцем у точці T), проінтегрувавши по $[0,T]$ і застосувавши формулу дробового інтегрування частинами, а також здійснивши граничний перехід ($k\to\infty$), можна показати, що u є слабким розв'язком задачі (1)–(2). Оскільки такий розв'язок єдиний, звідси випливає збіжність усієї послідовності $(u_m)_{m=1}^{\infty}$.

Неперервність розв'язку. Дослідимо розв'язок початково-крайової задачі на неперервність.

Терема 3. *Розв'язок u задачі* (1)–(2) *належить простору* $C([0,T],L_2(\Omega))$.

Доведення. Доведення здійснимо методом згладжень (усереднень). Для $\epsilon>0$ покладемо

$$u_\epsilon=\eta^\epsilon * u,$$

де

$$\eta(x)=\begin{cases} C\exp\left(\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

$$\eta^\epsilon(t)=\frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

а стала C вибирается з умови $\int\eta(t)\,dt=1$.

Доозначимо u нулем на відрізках $[-\theta,0)$ і $(T,T+\theta]$. Відомо [10], що для $u\in L_p([a,b],H)$ $u_\epsilon\to u$ за нормою простору $L_p([a,b],H)$, а самі усереднення належать класу $C^\infty([a,b],X)$. Тому можна застосувати нерівність Аліханова:

$${}^*D_0^\alpha\|u_\epsilon(t)-u_\delta(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant 2({}^*D_0^\alpha u_\epsilon(t)-{}^*D_0^\alpha u_\delta(t),u_\epsilon(t)-u_\delta(t))_{L_2(\Omega)},$$

де $t\in[0,T]$.

Інтегруючи (з показником α), маємо

$$\|u_\epsilon(t)-u_\delta(t)\|^2_{L_2(\Omega)}=\|u_\epsilon(0)-u_\delta(0)\|^2_{L_2(\Omega)}+2\int\limits_0^t\frac{\langle{}^*D_0^\alpha u_\epsilon(\tau)-{}^*D_0^\alpha u_\delta(\tau),u_\epsilon(\tau)-u_\delta(\tau)\rangle}{|t-\tau|^{1-\alpha}}d\tau.$$

Оскільки $u \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$, множина $\{u_\epsilon(0) | \epsilon > 0\}$ обмежена в нормі $L_2(\Omega)$. Дійсно, $u_\epsilon(0) = \int\limits_0^T \eta^\epsilon(s) u(s)\, ds$. Оскільки $\int \eta^\epsilon(t)\, dt = 1$, за нерівністю Бохнера маємо

$$\|u_\epsilon(0)\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \int\limits_0^T \eta^\epsilon(t) u_\epsilon(t)\, dt \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \int\limits_0^T |\eta^\epsilon(t)| \|u_\epsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{L_\infty([0,T],L_2(\Omega))} \int\limits_0^T |\eta^\epsilon(t)|\, dt = \|u\|_{L_\infty([0,T],L_2(\Omega))}.$$

Тому якщо вибрати послідовність $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$: $\epsilon_n \to 0$, то відповідно до властивості Банаха–Сакса знайдеться підпослідовність $(n_k)_{k=1}^\infty$, така, що

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}(0)}{m} - u(0) \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

З іншого боку, як легко бачити,

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - u \right\|_{L_p([0,T],H_0^1(\Omega))} \to 0, \qquad m \to \infty,$$

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^m {}^*D_0^\alpha u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - {}^*D_0^\alpha u \right\|_{L_p([0,T],H_0^{-1}(\Omega))} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

Позначимо через u_n $u_{\epsilon_{n_k}}$. Тоді можна записати

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u_n(0) - u_m(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$+ 2 \int\limits_0^t \frac{\langle {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau), u_\epsilon(\tau) - u_m(\tau) \rangle}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau \leqslant \|u_n(0) - u_m(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 +$$

$$+ 2 \int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|u_n(0) - u_m(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{\|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}^2}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau \tag{7}$$

(в останньому переході використано нерівність $2ab \leqslant a^2 + b^2$). Оцінимо окремо кожний з інтегралів:

$$\int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)}^2}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^t \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} \left(\int_0^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q},$$

де останній інтеграл збіжний при $q(1-\alpha) < 1$, тобто $p > 2/\alpha$. Неважко переконатися, що $J(t,s) = \int_s^t d\tau/|t-\tau|^{q(1-\alpha)}$ є обмеженою функцією. З іншого боку,

$$\int_0^t \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)} d\tau \leqslant \int_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)} d\tau.$$

Аналогічно дослідимо другий доданок з (7):

$$\int_0^t \frac{\|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}} d\tau \leqslant \left(\int_s^t \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} \left(\int_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} \left(\int_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}} d\tau \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\int_0^T \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)} d\tau \right)^{2/p}.$$

Отже,

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u_n(0) - u_m(0)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ M \left[\left(\int_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} + \left(\int_0^T \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} \right].$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m,n\to\infty} \|u_n(0) - u_m(0)\|^2_{L_2(\Omega)} \lim_{m,n\to\infty} M \left(\int_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} +$$

$$+ \lim_{m,n\to\infty} M \left(\int_0^T \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)} d\tau \right)^{2/p} = 0,$$

тобто u можна ототожнити (з точністю до множини міри 0) з границею послідовності (u_n) за нормою $\|\cdot\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}$.

Зауваження 1. Неперервність розв'язку дає змогу розглядати задачі оптимального керування з критеріями якості вигляду $J(u) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}$, $J = \|u(T) - \omega\|_{L_2(\Omega)}$ тощо.

Отже, у роботі досліджено питання збіжності методу Гальоркіна (з дискретизацією за простором) для розв'язку дробового за часом рівняння у частинних похідних. На відміну від випадку рівняння цілого порядку, доведення уже використовує існування і єдиність розв'язку, а не дає змогу обгрунтувати їх. Крім того, предметом подальших досліджень є уточнення класу функцій, для яких застосовна нерівність Аліханова. Також доведено неперервність розв'язку зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій, причому міркування загалом подібні до доведення аналогічного твердження у випадку похідної першого порядку.

1. *Metzler R., Klafter J.* The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – R161–R208.
2. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
3. *Сибатов Р. Т., Учайкин В. В.* Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках // Усп. физ. наук. – 2009. – **179**, № 10. – С. 1079–1104.
4. *Sokolov I. M.* Models of anomalous diffusion in crowded environments // Soft Matter. – 2012. – **42**, No 8. – P. 9043–9052.
5. *Bazhlekova E.* Fractional evolution equations in Banach spaces, PhD Thesis. – Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
6. *Ford N., Xiao J., Yan Y.* A finite element method for the time-fractional partial differential equations // Fract. Calc. Appl. An. – 2011. – **14**, No 3. – P. 454–474.
7. *Jin B., Lazarov R., Pasciak J., Zhou Z.* Error analysis of semidiscrete finite element methods for inhomogeneous time-fractional diffusion // IMA J. Numer Anal. – to appear. – doi:10.1093/imanum/dru018.
8. *Чикрий А. А., Матичин И. И.* Представление решений линейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля, Капуто и Миллера–Росса // Пробл. управления и информатики. – 2008. – № 3. – С. 133–142.
9. *Alikhanov A. A.* A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations // Dif. Equations. – 2010. – **46**, No 5. – P. 660–666.
10. *Evans L. C.* Partial differential equations. – Providence: Amer. Math. Soc., 1998. – 662 p.

Київський національний університет
ім. Тараси Шевченка

Надійшло до редакції 17.11.2014

А. Л. Гуляницкий

Слабые решения и сходимость метода Галеркина для дробного уравнения диффузии

Построен полудискретный метод Галеркина для дробного по времени уравнения диффузии. Доказана слабая сходимость этого метода в случае правой части со значениями в негативном пространстве по пространственной переменной. Также доказана непрерывность решения задачи со значениями в пространстве интегрируемых с квадратом функций.

A. L. Hulianytskyi

Weak solutions and convergence of the Galerkin method for the fractional diffusion equation

We construct a semidiscrete Galerkin method for the time-fractional diffusion equation. We prove the weak convergence of the method in the case of the right-hand side from a negative space with respect to the space variable. The continuity of the solution with values in a space of square-integrable functions is proven.