**ДОПОВІДІ**
**НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

3 • 2015

*МАТЕМАТИКА*

УДК 514.7

**В. И. Бабенко**

# К оценке снизу гауссовой кривизны строго выпуклой, замкнутой поверхности

*(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)*

*Получена оценка снизу гауссовой кривизны замкнутой, строго выпуклой поверхности по двум ее интегральным параметрам: ширине и радиусу описанного шара.*

В геометрической теории устойчивости оболочек вопрос об определении критического давления для строго выпуклой, замкнутой (или жестко закрепленной вдоль края) оболочки сводится к отысканию минимума гауссовой кривизны ее срединной поверхности [1, 2]. При проектировании тонкостенных конструкций, когда заданы лишь некоторые ограничения на размеры оболочки (неканонической формы), могут оказаться полезными априорные оценки для критических нагрузок — в нашем случае для гауссовой кривизны срединной поверхности оболочки. В [3] автором получен ряд таких оценок сверху, которые можно представить в следующем виде.

*Пусть $K$ — гауссова кривизна строго выпуклой поверхности $F$ с непрерывной кривизной и с заданными ограничениями на ее интегральные параметры, а $F_0$ — соответствующая веретенообразная выпуклая поверхность вращения с постоянной гауссовой кривизной $K_0 \equiv \mathrm{const}$. Тогда имеет место оценка*

$$\min_{(F)} K \leqslant K_0, \tag{1}$$

*где минимум берется по всем точкам поверхности $F$.*

В [3] рассмотрены три возможных варианта ограничений на интегральные параметры поверхности $F$: 1) на ее диаметр и объем; 2) на диаметр и площадь “поперечного” сечения тела, ограниченного поверхностью $F$; 3) на высоту и площадь плоского края незамкнутой поверхности $F$.

Дополним полученные в [3] результаты следующим утверждением, которое доказывается аналогично тому, как была доказана теорема 1 в [3]:

*1. Если $F$ — замкнутая поверхность, диаметр которой не меньше $D$, содержит шар радиуса не меньше $R$ $(0 < R \leqslant D/2)$, то $F_0$ имеет диаметр $D$ и радиус экваториального круга $R$.*

В данной работе предлагается следующая оценка:

**Теорема 1.** *Пусть $K$ — гауссова кривизна строго выпуклой, замкнутой поверхности $F$, которая имеет непрерывную кривизну, ширину не больше $\Delta$ и лежит в шаре радиуса не большем $R$, где $R \geqslant \Delta/2$. Пусть выпуклая поверхность вращения $F_{00}$ с постоянной гауссовой кривизной $K_{00} \equiv \mathrm{const}$ имеет ширину $\Delta$ и радиус экватора $R$, тогда имеет место оценка:*

$$\max_{(F)} K \geqslant K_{00}, \tag{2}$$

*где максимум берется по всем точкам поверхности $F$. Если $R = \Delta/2$, то $F_{00}$ — сфера и в (2) получим равенство, полагая, что $F$ совпадает с $F_{00}$. При $R > \Delta/2$ (в этом случае $R > 1/\sqrt{K_{00}}$ [4]) поверхность $F_{00}$ не будет замкнутой. Дополним ее до замкнутой, добавив два круга радиуса $\sqrt{R^2 - 1/K_{00}}$ на расстоянии $\Delta/2$ от экваториальной плоскости. Полученная замкнутая поверхность вращения по виду напоминает головку сыра, поэтому, следуя [5, с. 171], будем называть поверхность $F_{00}$ “сырообразной”. При $R > \Delta/2$ в (2) имеем строгое неравенство, где $K_{00}$ — точная нижняя граница.*

**Доказательство теоремы**. Допустим, что теорема неверна. То есть существует поверхность $\widetilde{F}$, для которой выполняются условия теоремы, но для ее гауссовой кривизны $\widetilde{K}$ вместо (2) имеет место ограничение

$$\max_{(F)} \widetilde{K} \leqslant K_{00}, \tag{3}$$

где равенство возможно только при $R > \Delta/2$.

Переведем поверхность $\widetilde{F}$ в центрально-симметричную поверхность вращения $\overline{F}$, удовлетворяющую условиям теоремы. Для этого, сначала осредняя опорную функцию $\widetilde{H}(\varphi, \psi)$ поверхности $\widetilde{F}$, переводим $\widetilde{F}$ в поверхность вращения $\widetilde{\widetilde{F}}$ с опорной функцией [5, с. 164]

$$\widetilde{\widetilde{H}}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \widetilde{H}(\varphi, \psi)\, d\varphi, \tag{4}$$

где $\varphi$ — долгота, $\psi$ — широта географической системы координат на единичной сфере с центром внутри $\widetilde{F}$ и с полярной осью $\alpha$, перпендикулярной одной из пар (если она не одна) касательных плоскостей, расстояние между которыми равно ширине $\widetilde{\Delta} \leqslant \Delta$ поверхности $\widetilde{F}$. Далее переводим поверхность $\widetilde{\widetilde{F}}$ в искомую центрально-симметричную, строго выпуклую, замкнутую поверхность вращения $\overline{F}$ с опорной функцией [5, с. 171]

$$\overline{H}(\psi) = \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{H}}(\psi) + \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{H}}(-\psi). \tag{5}$$

Поверхность $\overline{F}$ имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси $\alpha$ и лежит в шаре радиуса $R$. Она имеет ширину $\overline{\Delta} = \widetilde{\Delta} \leqslant \Delta$, радиус экваториального круга $\overline{R} \leqslant R$ и непрерывную гауссову кривизну $\overline{K}$, для которой

$$\max \overline{K} \leqslant \max \widetilde{K} \leqslant K_{00}, \tag{6}$$

поэтому $\overline{R} \geqslant 1/\sqrt{K_{00}}$ [5]. Тогда существует "сырообразная" поверхность вращения $\overline{F}_{00}$ с постоянной гауссовой кривизной $K_{00}$, которая имеет с поверхностью $\overline{F}$ общие ось вращения и экваториальный круг радиуса $\overline{R}$. Так как $\overline{K} \leqslant K_{00}$ (6), то согласно утверждению из [5, с. 172] $\overline{F}$ содержит "сырообразную" поверхность $\overline{F}_{00}$. Поэтому ширина $\overline{\Delta}$ поверхности $\overline{F}$ не меньше ширины $\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R})$ поверхности $\overline{F}_{00}$, т. е.

$$\overline{\Delta} \geqslant \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}), \tag{7}$$

где равенство возможно лишь тогда, когда $\overline{F}_{00}$ — замкнутая, т. е. сфера, и $\overline{F}$ совпадает с $\overline{F}_{00}$. Но тогда $\overline{K} = K_{00}$ и $\overline{R} = (1/2)\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}) = 1/\sqrt{K_{00}}$. В этом случае $R > \overline{R}$, так как при $R = \overline{R}$ поверхность $\overline{F}_{00}$ совпадает с $F_{00}$, т. е. $F_{00}$ — сфера и $R = \Delta/2$, при этом неравенство (6) примет вид

$$\overline{K} = \max \widetilde{K} = K_{00},$$

что противоречит неравенству (3), которое при $R = \Delta/2$ является строгим.

Ширина "сырообразной" поверхности монотонно убывает с увеличением радиуса ее экваториального круга [5, с. 172]. Поэтому в случае, когда в (7) имеет место равенство, получаем

$$\overline{\Delta}_{00}(K_{00}, \overline{R}) > \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, R) = \Delta, \tag{8}$$

так как $\overline{R} < R$. В итоге из (7), (8) находим, что ширина поверхности $\overline{F}$

$$\overline{\Delta} > \overline{\Delta}_{00}(K_{00}, R) = \Delta. \tag{9}$$

Поверхности $\widetilde{F}$ и $\overline{F}$ имеют одну и ту же ширину, поэтому ширина поверхностей $\widetilde{F}$

$$\widetilde{\Delta} = \overline{\Delta} > \Delta.$$

А это означает, что поверхность $\widetilde{F}$ не удовлетворяет всем условиям теоремы, поэтому предположение (3) неверно. Теорема доказана.

*Замечание.* Ширина $\Delta(K_{00}, R)$ "сырообразной" поверхности $F_{00}$ имеет следующий вид [5, с. 172]:

$$\Delta(K_{00}, R) = 2/\sqrt{K_{00}}\left(\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{K_{00}R^2 - \sin^2\psi}\,d\psi - (K_{00}R^2 - 1)\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{K_{00}R^2 - \sin^2\psi}}\right).$$

Она монотонно убывает с увеличением гауссовой кривизны $K_{00}$.

Действительно, пусть $K'_{00}$ — гауссова кривизна "сырообразной" поверхности $F'_{00}$, имеющей с $F_{00}$ одни и те же ось вращения и экваториальный круг. Тогда согласно утверждению из [5, с. 172] поверхность вращения $F_{00}$ содержит "сырообразную" поверхность $F'_{00}$, если $K'_{00} > K_{00}$; поэтому

$$\Delta(K'_{00}, R) < \Delta(K_{00}, R).$$

Воспользовавшись сведениями об эллиптических интегралах [6], можно показать, что $\Delta \leqslant 2/\sqrt{K_{00}}$. Таким образом, для $K_{00}$ получаем оценки $1/R \leqslant \sqrt{K_{00}} \leqslant 2/\Delta$, где равенство возможно только для сферы.

1. *Погорелов А. В.* Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1986. – 93 с.
2. *Бабенко В. И.* К геометрической теории потери устойчивости жестко закрепленных строго выпуклых оболочек при внешнем давлении // Докл. АН Украины. – 1993. – № 7. – С. 46–49.
3. *Бабенко В. И.* К оценке гауссовой кривизны строго выпуклых поверхностей // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 7–11.
4. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
5. *Бляшке В.* Круг и шар. – Москва: Наука, 1967. – 232 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. – Москва: Физматгиз, 1959. – 420 с.

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков*

*Поступило в редакцию 03.10.2014*

**В. І. Бабенко**

## До оцінки знизу гауссової кривизни строго випуклої, замкненої поверхні

*Одержано оцінку знизу гауссової кривизни замкненої, строго випуклої поверхні за двома інтегральними параметрами: шириною та радіусом описаного шару.*

**V. I. Babenko**

## On the lower bound of the Gauss curvature of a strictly convex closed surface

*The lower bound for the Gauss curvature on a strictly convex closed surface by its two integral parameters (width and radius of the circumscribed ball) are obtained.*