Доповіді
національної
академії наук
України

2 • 2015

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай**

Інтерполяція ермітового типу в точках системи неперетинних ліній

Запропоновано метод побудови операторів інтерлінації ермітового типу функції двох змінних в циліндричній системі координат $Or\varphi z$ для випадку, коли експериментальні дані (сліди функції та її частинні похідні до заданого порядку за змінною z) задані на системі відомих замкнутих неперетинних ліній. Ці оператори автоматично зберігають клас диференційовності наближуваної функції. На їх основі запропоновано метод побудови операторів інтерполяції функції двох змінних ермітового типу на системі M невідомих неперетинних ліній із збереженням класу диференційовності, якому належить наближувана функція. Для випадків, коли похідні деяких порядків або всі похідні невідомі, їх можна вважати параметрами, які дозволяють керувати забезпеченням ізогеометричних властивостей поверхні, що будується.

В задачах конструювання поверхонь з відомими властивостями виникають ситуації, коли інформація про поверхню задається точками на системі просторових неперетинних або перетинних ліній і при цьому математична модель поверхні $r = f(\varphi, z)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a \leqslant z \leqslant b$ в циліндричній системі координат повинна задовольняти деякій множині вимог, що формуються, найчастіше у вигляді відповідних критеріїв. Серед цих вимог відзначимо: належність функцій, що приймають участь в описі поверхні до потрібного класу диференційовності у всій області задання змінних або у деяких її підобластях; належність деяких (або всіх) заданих точок системі ліній, яка задається точками на конструйованій поверхні; збереження ізогеометричних властивостей конструйованою поверхнею, зокрема, збереження опуклості, вгнутості, збереження поведінки градієнта в деяких підобластях області задання параметрів тощо.

Зазначимо, що одночасне задовільнення всім вимогам є складною задачею, яка на даний час не розв'язана повністю. Тому актуальною є тема даної статті, присвяченої побудові операторів інтерполяції функцій $r = f(\varphi, z)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant H$ за допомогою даних $(r_{k,j}^{(s)}, \varphi_{k,j}, z_{k,j})$, $r_{k,j}^{(s)} = \dfrac{\partial^s f}{\partial z^s}(\varphi_{k,j}, z_{k,j})$; $k = \overline{1,M}$, $s = \overline{0,N}$, $j = \overline{1,Q_k}$ із збереженням класу C^q та ізогеометрії. Для побудови таких операторів інтерполяції спочатку будуються оператори інтерлінації на довільній системі замкнутих неперетинних кривих в циліндричній системі координат із автоматичним збереженням класу C^q, якому належить апроксимована функція [1–6]. Потім з їх допомогою будується математична модель поверхні, заданої дискретними наборами точок на вказаних кривих.

Для випадку, коли похідні деяких порядків або всі невідомі, їх можна вважати параметрами, які дозволять керувати забезпеченням ізогеометричних властивостей поверхні, що будується.

Таким чином, стаття умовно може бути розбита на дві частини:

1) побудова операторів інтерлінації $O_{MN}f(\varphi, z)$ функції $r = f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D)$, $\nu > 0$; $D = \{(\varphi, z)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant H\}$ заданої своїми слідами та слідами частинних похідних до порядку N, $f_{k,p}(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$, $p = \overline{0, N}$ за змінною z на довільній системі замкнутих неперетинних ліній $\Gamma_k\colon \{(\varphi, r, z)\colon r = r_k(\varphi) = f(\varphi, z_k(\varphi)), z = z_k(\varphi), 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, $k = \overline{1, M}$,

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(\varphi, z_k(\varphi)) = f_{k,p}(\varphi), \qquad k = \overline{1, M}, \qquad p = \overline{0, N}$$

із збереженням класу

$$f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D) \Rightarrow O_{MN}f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D);$$

2) побудова операторів інтерполяції ермітового типу на нерегулярній сітці вузлів, розміщених на довільній невідомій системі замкнутих неперетинних ліній в циліндричній системі координат.

Задача полягає у побудові математичної моделі поверхні у вигляді $r = E_{MN}f(\varphi, z)$ з властивостями

$$\frac{\partial^p E_{MN}f}{\partial z^p}(\varphi_{k,j}, z_{k,j}) = r_{k,j}^{(p)}, \qquad k = \overline{1, M}; \qquad p = \overline{0, N}; \qquad j = \overline{1, Q_k},$$

та $f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D) \Rightarrow E_{MN}f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D)$.

Побудова операторів інтерлінації. Вважаємо відомою систему M ліній Γ_k: $\{(r, \varphi, z)\colon r = r_k(\varphi) = f(\varphi, z_k(\varphi)), z = z_k(\varphi), 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, $k = \overline{1, M}$, $r_k(\varphi) \in C^{\nu}(D)$, $z_k(\varphi) \in C^{\nu}(D)$, $k = \overline{1, M}$ у параметричній формі та сліди функції $r = f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D)$, $D = \{(\varphi, z)\colon 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant H\}$ і її похідних до порядку N за змінною z на вказаних лініях:

$$\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(\varphi, z_k(\varphi)) = f_{k,p}(\varphi), \qquad k = \overline{1, M}, \qquad p = \overline{0, N}.$$

Вважаємо, що функція (взагалі кажучи, невідома) $r = f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D)$ задається на системі неперетинних замкнутих кривих $\Gamma_k = \{(r, \varphi, z)\colon r = r_k(\varphi) = f(\varphi, z_k(\varphi)) \in C^{\nu}[0, 2\pi], z = z_k(\varphi) \in C^{\nu}[0, 2\pi]\}$, $k = \overline{1, M}$ своїми слідами та слідами своїх похідних $f_{k,s}(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$; $s = \overline{0, N}$.

Введемо позначення $g_k(\varphi, z, \beta) = \varphi + \beta(z - z_k(\varphi))$. Врахуємо, що

$$g_k(\varphi, z_k(\varphi), \beta) = \varphi; \qquad g_k(\varphi, z_l(\varphi), \beta) = \varphi + \beta(z_l(\varphi) - z_k(\varphi)).$$

Введемо до розгляду систему функцій $h_{k,s}(\varphi, z)$ з властивостями

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q} h_{k,s}(\varphi, z)\bigg|_{\Gamma_l} = \delta_{k,l}\delta_{q,N-s}; \qquad k, l = \overline{1, M}; \qquad q, s = \overline{0, N}, \tag{1}$$

та систему функцій $G_s(\beta)$, $s=\overline{0,N}$ з властивостями

$$\int\limits_{0}^{2\pi} G_s(\beta)\beta^m d\beta = \delta_{0,m}; \qquad s,m=\overline{0,N}. \tag{2}$$

Пропонується такий вигляд шуканого оператора інтерлінації із автоматичним збереженням класу диференційовності

$$E_{M,N}f(\varphi,z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1} G_0(\beta)f_{k,0}(g_k(\varphi,z,\beta))\,d\beta +$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N} h_{k,s}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1} G_s(\beta)\int\limits_{0}^{g_k(\varphi,z,\beta)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(\varphi,z,\beta)-u)^{s-1}}{(s-1)!}dud\beta.$$

Теорема 1. *Якщо* $f_{k,s}(\varphi)\in C^{\nu-s}[0,2\pi]$, $s=\overline{0,N}$, $N\leqslant\nu$, *то* $\forall\,\beta\in[-1,1]$,

$$U_{k,0}(\varphi,z,\beta) = f_{k,0}(g_k(\varphi,z,\beta))\in C^{\nu}(D^*), \qquad D^*=[0,2\pi]\times[0,H]\times[-1,1],$$
$$U_{k,s}(\varphi,z,\beta) = \int\limits_{0}^{g_k(\varphi,z,\beta)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(\varphi,z,\beta)-u)^{s-1}}{(s-1)!}du\in C^{\nu}(D^*).$$

Теорема 2 . *Якщо виконуються співвідношення* (1)–(2), *то функції*

$$V_{k,0}(\varphi,z,\beta) = \int\limits_{-1}^{1} G_0(\beta)f_{k,0}(g_k(\varphi,z,\beta))\,d\beta\in C^{\nu}(D^*),$$
$$V_{k,s}(\varphi,z) = \int\limits_{-1}^{1} G_s(\beta)\int\limits_{0}^{g_k(\varphi,z,\beta)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(\varphi,z,\beta)-u)^{s-1}}{(s-1)!}dud\beta\in C^{\nu}(D^*)$$

мають властивості

$$\frac{\partial^q}{\partial z^q}V_{k,0}(\varphi,z)\Big|_{\Gamma_k} = \begin{cases} f_{k,0}(\varphi), & q=0,\\ 0, & 1\leqslant q\leqslant N,\end{cases}$$
$$\frac{\partial^q}{\partial z^q}V_{k,s}(\varphi,z)\Big|_{\Gamma_k} = \begin{cases} 0, & 0\leqslant q\leqslant s-1,\\ f_{k,s}(\varphi), & q=s,\\ \displaystyle\int\limits_{-1}^{1}G_s(\beta)\frac{\partial^{q-s}}{\partial z^{q-s}}f_{k,s}(g_k(\varphi,z,\beta))\,d\beta\Big|_{\Gamma_k}=0, & s<q\leqslant N.\end{cases} \tag{3}$$

Теорема 3. *Якщо виконуються співвідношення* (1)–(2), *то оператор*

$$O_{MN}f(\varphi,z)=\sum_{k=1}^{M}h_{k,0}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1}G_0(t)f_{k,0}(\varphi+t(z-z_k(\varphi)))dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{N}h_{k,s}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1}G_s(\beta)\int\limits_{0}^{\varphi+\beta(z-z_k(\varphi))}f_{k,s}(u)\frac{(\varphi+\beta(z-z_k(\varphi))-u)^{s-1}}{(s-1)!}dud\beta \quad (4)$$

має властивості

$$f_{k,s}(\varphi)\in C^{\nu-s}[0,2\pi],\qquad k=\overline{1,M};\qquad s=\overline{0,N}\quad\Rightarrow\quad O_{MN}f(\varphi,z)\in C^{\nu}(D),$$
$$\frac{\partial^p O_{MN}f}{\partial z^p}(\varphi,z_k(\varphi))=f_{k,p}(\varphi),\qquad k=\overline{1,M},\qquad p=\overline{0,N}.$$

Побудова операторів інтерполяції ермітового типу на нерегулярній сітці вузлів, розміщених на довільній системі неперетинних ліній в циліндричній системі координат із збереженням класу $C^{\nu}(D)$ проводиться у вигляді:

$$E_{MN}f(\varphi,z)=\sum_{s=1}^{N}h_{k,0}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1}G_0(\beta)sp_{k,0}(\varphi+\beta(z-sp_k(\varphi)))\,d\beta+$$
$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=1}^{m}h_{k,s}(\varphi,z)\int\limits_{-1}^{1}G_s(t)\int\limits_{0}^{\varphi+t(z-sp_k(\varphi))}sp_{k,s}(u)\frac{(\varphi+t(z-sp_k(\varphi))-u)^{s-1}}{(s-1)!}dudt,$$

де сплайни $sp_{k,s}(u)$ задовольняють умови $sp_{k,s}^{(p)}(\varphi_j)=r_{k,j}^{p}\delta_{0,p}$; $sp_k(\varphi_j)=r_{k,j}^{0}$, $k=\overline{1,M}$; $p,s=\overline{1,N}$; $j=\overline{0,Q_k}$.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови теореми 1, то оператор* $E_{MN}f(\varphi,z)$ *має властивості*

$$sp_{k,s}(\psi)\in C^{m-s}[0,2\pi],\qquad k=\overline{1,M};\qquad s=\overline{0,N}\Rightarrow E_{MN}f(\psi,z)\in C^{m}(D),$$
$$sp_{k,s}(\varphi_j)=r_{k,j}^{(s)},\qquad k=\overline{1,M};\qquad s=\overline{0,N};$$
$$j=\overline{1,Q_{k,s}}\ \Rightarrow\ \frac{\partial^p E_{MN}f}{\partial z^s}(\psi_j,z_{k,j})=r_{k,j}^{(s)},\qquad k=\overline{1,M};\qquad s=\overline{0,N};\qquad j=\overline{1,N}.$$

Таким чином, в даній роботі запропоновані формули для побудови операторів інтерлінації ермітового типу із збереженням класу диференційовності, які дозволяють обчислювати функцію $f(\varphi,z)$ у точках між системою неперетинних замкнутих ліній в циліндричній системі координат, якщо на цих лініях задані сліди функції $f(\varphi,z)$ та сліди її похідних до порядку N за змінною z; формули для побудови операторів інтерполяції, що використовують вказані вище оператори інтерлінації ермітового типу із збереженням класу диференційовності, які дозволяють обчислювати функцію $f(\varphi,z)$ у точках між системою неперетинних замкнутих ліній в циліндричній системі координат, якщо на цих лініях задані сліди функції $f(\varphi,z)$ та сліди її похідних до порядку N за змінною z. Ці оператори інтерполюють функцію $f(\varphi,z)$ та її частинні похідні до порядку N за змінною z у заданих точках, що належать лініям інтерлінації в операторі інтерлінації. Звертаємо увагу на те, що при побудові операторів інтерполяції вважаються заданими лише дискретні набори значень наближуваної функції та її похідних за змінною z в точках уявних ліній інтерлінації.

Зауваження 1. Якщо $m = 1$ і нам задані лише значення $(r^{(0)}_{k,j}, \varphi_{k,j}, z_{k,j})$, $k = \overline{1, M}$; $j = \overline{1, Q_k}$, то значення $(r^{(1)}_{k,j}, \varphi_{k,j}, z_{k,j})$, $k = \overline{1, M}$; $j = \overline{1, Q_k}$ можна використовувати у формулі

$$E_{M1}f(\varphi, z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_0(\beta) sp_{k,0}(\varphi + \beta(z - z_k(\varphi)))\, d\beta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M} h_{k,1}(\varphi, z) \int_{-1}^{1} G_1(\beta) \int_{0}^{\varphi+\beta(z-sp_k(\varphi))} sp_{k,1}(u)\, du d\beta,$$

$$\int_{-1}^{1} G_1(t) t^p dt = \delta_{1,p}, \qquad p = \overline{0, 1}$$

при побудові сплайнів $sp_{k,1}(\varphi)$, $k = \overline{1, M}$ і використовувати їх у якості параметрів, що відповідають за збереження ізогеометричних властивостей, оскільки в цьому випадку при довільному виборі $r^{(1)}_{k,j}$, $k = \overline{1, M}$; $j = \overline{1, Q_k}$. формула для $E_{M1}f(\varphi, z)$ має властивості $sp_{k,s}(\varphi) \in C^{\nu-s}([0, 2\pi])$, $k = \overline{1, M}$; $s = \overline{0, 1} \Rightarrow E_{M1}f(\varphi, z) \in C^{\nu}(D)$,

$$sp_{k,p}(\varphi_j) = r^{(p)}_{k,j} \to \frac{\partial^p E_{M1} f}{\partial z^p}(\varphi_j, z_{k,j}) = r^{(p)}_{k,j}, \qquad k = \overline{1, M}; \qquad p = \overline{0, 1}; \qquad j = \overline{1, Q_k}.$$

Зауваження 2. Метод дозволяє для кожного значення $k = \overline{1, M}$ використовувати як різну кількість інтерполяційних даних $(r^{(p)}_{k,j}, \varphi_{k,j}, z_{k,j})$, $k = \overline{1, M}$; $p = \overline{0, N}$; $j = \overline{1, Q_{k,p}}$ так і однакову $(r^{(p)}_{k,j}, \varphi_j, z_{k,j})$, $k = \overline{1, M}$; $p = \overline{0, N}$; $j = \overline{1, Q}$.

1. *Сергієнко І. В., Дейнека В. С.* Системний аналіз. – Київ: Наук. думка, 2013. – 500 с.
2. *Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М.* Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. – Київ: Наук. думка, 2012. – 404 с.
3. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
4. *Литвин О. М.* Побудова функцій n змінних із заданими нормальними похідними на $\mathbb{R}^m$ $(1 \leqslant m \leqslant n - 1)$ із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^n)$ // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 5. – С. 13–17.
5. *Литвин О. М.* Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i-0}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) = g(x, t)$ // Там само. – 1991. – № 3. – С. 12–17.
6. *Квасов Б. И.* Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – Москва: Физматлит, 2006. – 360 с.
7. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л.* Ермітова інтерлінація функцій 2-х змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^2)$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 45–50.
8. *Сергієнко І. В., Литвин О. М., Литвин О. О., Ткаченко О. В., Грицай О. Л.* Інтерлінація функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих із збереженням класу $C^r(\mathbb{R}^3)$ // Там само. – 2015. – № 1. – С. 45–50.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ
Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
ДП "Івченко-Прогрес", Запоріжжя

Надійшло до редакції 25.12.2013

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин, А. В. Ткаченко, О. Л. Грицай**

Интерполяция эрмитового типа в точках системы непересекающихся линий

Предложен метод построения операторов интерлинации эрмитового типа функции двух переменных в цилиндрической системе координат $Or\varphi z$ для случая, когда экспериментальные данные (следы функции и ее частные производные до заданного порядка по переменной z) заданы на системе известных замкнутых непересекающихся линий. Эти операторы автоматически сохраняют класс гладкости приближенной функции. На их основе предложено метод построения операторов интерполяции функции двух переменных эрмитового типа на системе M неизвестных непересекающихся линий с сохранением класса гладкост, которому принадлежит приближаемая функция. Для случаев, когда производные некоторых порядков или все производные неизвестны, их можно считать параметрами, которые позволяют управлять обеспечением изогеометрических свойств поверхности, которая строится.

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, A. V. Tkachenko, O. L. Gritcay**

Hermitian-type interpolation at point of the system of disjoint lines on a surface

A method of construction of the Hermitian-type operators of interlineation of a function of two variables in the cylindrical coordinate system $Or\varphi z$ in the case where the experimental data (traces of a function and its partial derivatives up to the given order in the variable z) are set on the system of known closed disjoint lines. These operators conserve automatically a class of smoothness of the approximated function. On their basis, a method of construction of the Hermitian-type operators of interlineation of a function of two variables on a system of M unknown closed disjoint lines with conservation of a class of smoothness, to which the approximated function belongs. In the cases where the derivatives of some orders or all derivatives are unknown, they can be considered as parameters that allow one to control the ensuring of isogeometric properties of a surface under construction.