

УДК 517.5

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень класів аналітичних функцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

В метриках просторів L_s , $1 \leq s \leq \infty$, одержано точні за порядком оцінки знизу найкращих m -членних тригонометричних наближень класів згортки періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_p , $1 \leq p \leq \infty$, з твірним ядром $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \times \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, коефіцієнти $\psi(k)$ якого прямують до нуля не повільніше за геометричну прогресію. Знайдені оцінки збіглися за порядком із наближеннями частинними сумами Фур'є вказаних класів функцій в L_s -метриці, що дозволило також записати точні порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень та тригонометричних поперечників зазначених класів.

Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$, — простір 2π -періодичних сумовних у p -му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ з нормою

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функція із L_1 , ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx},$$

де $\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$, $\psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел і β — фіксоване дійсне число. Тоді якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\widehat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \frac{\beta\pi}{2} \operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої функції φ з L_1 , то цю функцію називають (ψ, β) -похідною функції f і позначають через f_β^ψ (див., наприклад, [1, с. 132]). Множину функцій f , у яких існує (ψ, β) -похідна, позначають через L_β^ψ .

Розглянемо одиничну кулю B_p у просторі дійснозначних функцій з L_p , тобто множину функцій $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що $\|\varphi\|_p \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$. Якщо $f \in L_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi \in B_p$, то кажуть, що функція f належить класу $L_{\beta,p}^\psi$.

© А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, 2015

Підмножини неперервних функцій із L_{β}^{ψ} та $L_{\beta,p}^{\psi}$ будемо позначати через C_{β}^{ψ} та $C_{\beta,p}^{\psi}$ відповідно.

У випадку коли $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $L_{\beta,p}^{\psi}$ є відомими класами Вейля–Надя $W_{\beta,p}^r$.

Послідовності $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, що визначають класи $L_{\beta,p}^{\psi}$, зручно розглядати як звуження на множину натуральних чисел \mathbb{N} деяких додатних, неперервних, опуклих донизу функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, таких, що $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій $\psi(t)$ будемо позначати через \mathfrak{M} .

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [1, с. 160]), кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right), \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

де ψ^{-1} — обернена до ψ функція, і покладемо

$$\mathfrak{M}_{\infty}^{+} = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty, t \rightarrow \infty\}.$$

Через \mathfrak{M}'_{∞} позначимо підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, для яких величина $\eta(\psi; t) - t$ обмежена зверху, тобто існує стала $K > 0$ така, що $\eta(\psi; t) - t \leq K$, $t \geq 1$.

Як впливає з [2, с. 1698], функції з множини C_{β}^{ψ} , де $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, складаються із тих і тільки тих 2π -періодичних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження в смугу $|\operatorname{Im}z| \leq c$, $c > 0$ комплексної площини. Отже, класи $C_{\beta,p}^{\psi}$ є класами аналітичних функцій.

Природними представниками функцій з множини \mathfrak{M}'_{∞} є функції $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, $r \geq 1$.

Нехай $f \in L_s$ і γ_m , $m \in \mathbb{N}$, — довільний набір із m цілих чисел. Величину

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad (1)$$

називають найкращим m -членним тригонометричним наближенням функції f в метриці простору L_s . В більш загальній ситуації величини виду (1) при $s = 2$ були введені С. Б. Стечкіним [3] з метою встановлення критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів.

Для довільного класу F із L_s покладемо

$$e_m(F)_s := \sup_{f \in F} e_m(f)_s, \quad 1 \leq s \leq \infty. \quad (2)$$

Порядки спадання до нуля при $n \rightarrow \infty$ величин (2) при $F = L_{\beta,p}^{\psi}$ для різних співвідношень між параметрами p і s за умови $\psi \in B$, де B — множина незростаючих додатних функцій $\psi(t)$, $t \geq 1$, для кожної з яких існує додатна стала K така, що $\psi(t)/\psi(2t) \leq K$, $t \geq 1$, та при деяких додаткових умовах на функцію ψ досліджувались у роботах [4–6].

В даній роботі розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок величин $e_m(L_{\beta,p}^{\psi})_s$, $1 \leq p$, $s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$.

Крім величин $e_m(F)_s$ в роботі для класів $F = L_{\beta,p}^{\psi}$ розглядаються величини вигляду

$$e_m^{\perp}(F)_s = \sup_{f \in F} \inf_{\gamma_m} \left\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty, \quad m \in \mathbb{N},$$

які називають найкращими ортогональними тригонометричними наближеннями класу $F = L_{\beta,p}^\psi \subset L_s$ в метриці простору L_s , а також величини

$$d_m^\top(F)_s := \inf_{\gamma_m} \sup_{f \in F} \inf_{c_k \in \mathbb{C}} \left\| f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} c_k e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty,$$

які називають тригонометричними поперечниками класу F в метриці простору L_s .

Позначимо через $\mathcal{E}_n(F)_s$ наближення сумами Фур'є класу $F \subset L_s$ в метриці простору L_s , тобто величини вигляду

$$\mathcal{E}_n(F)_s = \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{f}(k) e^{ikx} \right\|_s, \quad 1 \leq s \leq \infty.$$

З означень величин $e_m(F)_s$, $e_m^\perp(F)_s$, $d_m^\top(F)_s$ і $\mathcal{E}_n(F)_s$ випливає, що при $m = 2n$, $2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності

$$e_m(F)_s \leq \frac{e_m^\perp(F)_s}{d_m^\top(F)_s} \leq \mathcal{E}_n(F)_s. \quad (3)$$

Зазначимо, що величини $e_m(F)_s$, $e_m^\perp(F)_s$, $d_m^\top(F)_s$ і $\mathcal{E}_n(F)_s$ для різноманітних класів функцій F як однієї, так і багатьох змінних вивчалися багатьма авторами. З детальною історією досліджень цих величин та відповідною бібліографією можна ознайомитись, наприклад, в роботах [7–12].

Теорема 1. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \leq p$, $s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді мають місце порядкові оцінки

$$e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp e_{2n-1}(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi(n). \quad (4)$$

Доведення теореми. Внаслідок теореми 6.8.2 роботи [10, с. 48], якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то

$$\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi(n), \quad 1 \leq p, s \leq \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Згідно зі співвідношеннями (3) і (5) одержуємо

$$e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s \leq e_{2n-1}(L_{\beta,p}^\psi)_s \leq C_0 \psi(n), \quad 1 \leq p, s \leq \infty,$$

де C_0 — деяка додатна стала. Знайдемо відповідну оцінку знизу для величини $e_{2n}(L_{\beta,p}^\psi)_s$. Доозначимо послідовність $\psi(k)$ у точці $k = 0$ за допомогою рівності $\psi(0) = \psi(1)$. Розглянемо функцію

$$f^*(t) = f^*(\psi; n; t) := C_1 \left(\frac{\psi(1)}{2(n+A)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} \cos kt \right),$$

де C_1 та A — деякі додатні сталі, які будуть визначені пізніше.

Оскільки

$$\| (f^*)^\psi_\beta(t) \|_p = C_1 \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+A)^2} \cos \left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \right\|_p \leq 2\pi C_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k+A)^2},$$

то очевидно, що вибравши сталу C_1 так, щоб $2\pi C_1 \sum_{k=1}^n 1/(n-k+A)^2 \leq 1$, отримаємо включення $f^* \in L_{\beta,p}^\psi$. Покажемо, що

$$e_{2n}(f^*)_s \geq C_2 \psi(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

де C_2 — деяка додатна стала.

З цією метою скористаємося співвідношенням двоїстості (див., наприклад, [13, с. 42])

$$e_m(f)_s = \inf_{\gamma_m} \sup_{\substack{h \in L^\perp(\gamma_m), \\ \|h\|_{s'} \leq 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(t) dt \right|, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $1/s + 1/s' = 1$, а запис $h \in L^\perp(\gamma_m)$ означає, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{ikt} dt = 0, \quad k \in \gamma_m.$$

Для довільного набору γ_{2n} із $2n$ цілих чисел візьмемо довільне ціле число k^* таке, що $k^* \in [-n, n]$ і $k^* \notin \gamma_{2n}$. Покладемо

$$T(t) := \frac{1}{2\pi} e^{-ik^*t}.$$

Очевидно, що $T \in L^\perp(\gamma_{2n})$ і $\|T\|_{s'} \leq 1$, $1 \leq s \leq \infty$, $1/s + 1/s' = 1$, а отже, згідно зі співвідношенням (7) та рівністю

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{imt} dt = \begin{cases} 0, & k+m \neq 0, \\ 2\pi, & k+m = 0, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z},$$

отримуємо оцінку

$$\begin{aligned} e_{2n}(f^*)_s &= \inf_{\gamma_{2n}} \sup_{\substack{h \in L^\perp(\gamma_{2n}), \\ \|h\|_{s'} \leq 1}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)h(t) dt \right| \geq \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)T(t) dt \right| = \\ &= \frac{C_1}{4\pi} \inf_{\gamma_{2n}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|k| \leq n} \frac{\psi(|k|)}{(n-|k|+A)^2} e^{-ikt} e^{-ik^*t} dt \right| = \frac{C_1}{2} \inf_{\gamma_{2n}} \frac{\psi(|k^*|)}{(n-|k^*|+A)^2} \geq \\ &\geq \frac{C_1}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2} = \frac{C_1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n-k+A)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажемо, що функція $\psi_n(t) = \psi(t)/(n-t+A)^2$ при певному виборі сталої A не зростає на проміжку $[1, n]$. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} \psi'_n(t) &= \left(\frac{\psi(t)}{(n-t+A)^2} \right)' = \frac{2\psi(t)}{(n-t+A)^3} + \frac{\psi'(t)}{(n-t+A)^2} = \\ &= \frac{\psi(t)}{(n-t+A)^3} \left(2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} (n-t+A) \right), \quad \psi'(t) := \psi'(t+0). \end{aligned} \quad (9)$$

Далі скористаємось тим, що для $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$ за умови $\mu(t) \geq b > 0$ має місце нерівність (див. [14, с. 1251])

$$\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \leq 4 \left(1 + \frac{1}{b}\right) (\eta(t) - t), \quad t \geq 1. \quad (10)$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то існує стала $K_0 > 0$ така, що $\eta(t) - t \leq K_0$, а отже,

$$\mu(t) = \frac{t}{\eta(t) - t} \geq \frac{1}{\eta(t) - t} \geq \frac{1}{K_0}, \quad (11)$$

і застосовуючи (10) при $b = 1/K_0$, маємо

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \geq \frac{1}{4(K_0 + 1)(\eta(t) - t)} \geq \frac{1}{4(K_0 + 1)K_0}. \quad (12)$$

Враховуючи (12), отримуємо

$$2 - \frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}(n - t + A) \leq 2 - \frac{1}{4(K_0 + 1)K_0}(n - t + A) \leq 2 - \frac{A}{4(K_0 + 1)K_0}. \quad (13)$$

З (9) і (13) випливає, що при $A \geq 8K_0(K_0 + 1)$ справедлива нерівність $\psi'_n(t) \leq 0$, $t \geq 1$, тобто функція $\psi_n(t)$ не зростає. Тому

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{\psi(k)}{(n - k + A)^2} = \frac{\psi(n)}{A^2}. \quad (14)$$

З (8) та (14) отримуємо (6). Теорему доведено.

Згідно з теоремою 1 і співвідношеннями (3) та (5) можна записати таке твердження.

Теорема 2. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$. Тоді

$$e_m(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp e_m^\perp(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp d_m^\top(L_{\beta,p}^\psi)_s \asymp \psi\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right),$$

де запис $[a]$ означає цілу частину дійсного числа a .

1. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. I. – Київ, 2002. – 427 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 40).
2. Степанец А. И., Сердюк А. С., Шидлич А. Л. Классификация бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 12. – С. 1686–1708.
3. Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.
4. Федоренко О. С. Наближення (ψ, β) -диференційовних функцій тригонометричними поліномами: Автореф. дис. . . . канд. фіз.-мат. наук / Ін-т математики НАН України. – Київ, 2001. – 16 с.
5. Федоренко А. С., Федоренко О. С. Найкращі m -членні тригонометричні наближення класів $L_{\beta,p}^\psi$ в рівномірній метриці // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2003. – Т. 46. – С. 276–282.
6. Федоренко А. С., Федоренко О. С. Найкращі m -членні тригонометричні наближення класів $L_{\beta,p}^\psi$ у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 1. – С. 129–132.
7. Романюк А. С. Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61–100.
8. Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 2. – С. 247–261.

9. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. – Київ, 2012. – 352 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 93).
10. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. II. – Київ, 2002. – 468 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 40).
11. Романюк В. С. Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций // Экстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2003. – Т. 46. – С. 131–135.
12. Грабова У. З., Сердюк А. С. Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β) -диференційовних функцій // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 9. – С. 1186–1197.
13. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. – Москва: Наука, 1987. – 424 с.
14. Сердюк А. С., Степанюк Т. А. Оцінки найкращих наближень класів нескінченно диференційовних функцій в рівномірній та інтегральних метриках // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 9. – С. 1244–1256.

Інститут математики НАН України, Київ
 Східноєвропейський національний університет
 ім. Лесі Українки, Луцьк

Надійшло до редакції 10.10.2014

А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк

Оценки наилучших m -членных тригонометрических приближений классов аналитических функций

В метриках пространств L_s , $1 \leq s \leq \infty$, получены точные по порядку оценки наилучших m -членных тригонометрических приближений классов сверток периодических функций, которые принадлежат единичному шару пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$, с производящим ядром $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, коэффициенты $\psi(k)$ которого стремятся к нулю не медленнее геометрической прогрессии. Полученные оценки совпали по порядку с приближением частичными суммами Фурье указанных классов функций в L_s -метрике, что позволило также записать точные порядковые оценки наилучших ортогональных тригонометрических приближений и тригонометрических поперечников указанных классов.

A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk

Estimates of the best m -term trigonometric approximations of classes of analytic functions

In the metrics of spaces L_s , $1 \leq s \leq \infty$, we obtain exact in order estimates of the best m -term trigonometric approximations of classes of the convolutions of periodic functions that belong to a unit ball of the space L_p , $1 \leq p \leq \infty$, with the generating kernel $\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt - \beta\pi/2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, whose coefficients $\psi(k)$ tend to zero not slower than a geometric progression. The obtained estimates coincide in order with the approximation by Fourier sums of the given classes of functions in the L_s -metric. This fact allows us to write down exact order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations and the trigonometric widths of the given classes.