УДК 517.95

Член-кореспондент НАН України **Б. Й. Пташник, С. М. Репетило**

Задача Діріхле–Неймана для лінійних нееліптичних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

В області, що є декартовим добутком відрізка на багатовимірний тор, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною та умовами періодичності за іншими координатами для лінійних загальних (незалежно від типу) рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами, ізотропних стосовно порядку диференціювання за незалежними змінними. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі та конструктивно побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Крайові задачі з локальними умовами на всій межі області для нееліптичних (гіперболічних і безтипних) рівнянь з частинними похідними є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність в обмежених областях пов'язана з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [1–5] та бібліографію в них). Коректність таких задач, а також близьких до них за природою задач з нелокальними крайовими умовами вивчалась багатьма авторами; зокрема, у роботах [1, 2, 4–10] для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь досліджено задачі з умовами типу Діріхле, типу Неймана і мішаними умовами (Діріхле–Неймана).

У даній роботі результати праці [5] частково поширено на задачу з умовами Діріхле–Неймана за виділеною змінною t для загального (незалежно від типу) рівняння $2n$-го порядку, $n \geqslant 1$, яка вивчається в області, що є декартовим добутком відрізка на p-вимірний тор, $p \geqslant 1$. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі та побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Розглянуто також частинні випадки досліджуваної задачі.

1. Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}^p_+$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{R}^p_+$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$, $\widehat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) := (s_0, s) \in \mathbb{Z}^{p+1}_+$, $|\widehat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $|\widehat{s}|^* = 2s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$; i — уявна одиниця; c_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — додатні сталі, які не залежать від $k \in \mathbb{Z}^p$; Ω^p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $D = \{(t, x) \colon t \in (0, T), x \in \Omega^p\}$; $\operatorname{mes} B$ — міра Лебега множини $B \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$; $\mathcal{T}$ — простір скінченних тригонометричних поліномів з комплексними коефіцієнтами $v(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant N} v_k \exp(ik, x)$, $N \in \mathbb{N}$, в якому збіжність визначається таким чином: $v^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{T}} v(x)$, якщо, починаючи з деякого номера, степені всіх поліномів $v^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, не перевищують деякого фіксованого числа N_1 і $v^n_k \underset{n\to\infty}{\to} v_k$ для кожного k; $\mathcal{T}'$ — простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}$ зі слабкою збіжністю (простір $\mathcal{T}'$ збігається з простором формальних тригонометричних рядів [11]); $C^r([0, T]; \mathcal{T})$ $(C^r([0, T]; \mathcal{T}'))$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій

$v(t,x) = \sum\limits_{|k|\geqslant 0} v_k(t)\exp(ik,x)$, $v_k(t) \in C^r([0,T])$, $k \in \mathbb{Z}^p$, таких, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ $\partial^j v/\partial t^j \in \mathcal{T}(\mathcal{T}')$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$; $H_q(\Omega^p)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}$ за нормою $\|v; H_q(\Omega^p)\|^2 := \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (1+|k|^2)^q |v_k|^2$; $C^r([0,T]; H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, — банахів простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^j v(t,x)/\partial t^j$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$, належать до простору $H_{q-j}(\Omega^p)$ та є неперервними за t у нормі цього простору, $\|v; C^r([0,T], H_q(\Omega^p))\| := \sum\limits_{j=0}^{r} \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|\partial^j v/\partial t^j; H_{q-j}(\Omega^p)\|$. Очевидно, що $C^r([0,T]; H_q(\Omega^p)) \subset C^r([0,T]; \mathcal{T}')$, $q \in \mathbb{R}$.

2. В області D розглянемо задачу

$$L[u] := \sum_{|\widehat{s}|^* \leqslant 2n} A_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|^*} u(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \quad (t,x) \in D, \quad A_{\widehat{s}} \in \mathbb{C}, \quad A_{(n,0,\ldots,0)} = 1, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_r[u] := \left.\dfrac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x), \\ U_{n+r}[u] := \left.\dfrac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x), \end{cases} \qquad r \in \{1,\ldots,n\}, \qquad x \in \Omega^p. \tag{2}$$

Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на функції u та φ_j, $j \in \{1,\ldots,2n\}$. Нехай $\varphi_j \in \mathcal{T}'$,

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \varphi_{jk} \exp(ik,x), \qquad \varphi_{jk} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int\limits_{\Omega^p} \varphi_j(x) \exp(-ik,x)\, dx, \qquad j \in \{1,\ldots,2n\}.$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ називатимемо функцію $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(ik,x)$ таку, що кожен з коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, належить простору $C^{2n}([0,T])$ і справджує, відповідно, рівності

$$\sum_{|\widehat{s}|^* \leqslant 2n} A_{\widehat{s}} (ik_1)^{s_1} \cdots (ik_p)^{s_p} \frac{d^{2s_0} u_k(t)}{dt^{2s_0}} = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = \varphi_{rk}, \qquad u_k^{(2r-1)}(T) = \varphi_{n+r,k}, \qquad r \in \{1,\ldots,n\}. \tag{4}$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ рівнянню (3) відповідає характеристичне рівняння

$$\sum_{|\widehat{s}|^* \leqslant 2n} A_{\widehat{s}} (ik_1)^{s_1} \cdots (ik_p)^{s_p} \eta^{2s_0} = 0, \tag{5}$$

η-корені якого є такими:

$$\eta_j := \eta_j(k) = \sqrt{|\lambda_j(k)|} \exp(i \arg \lambda_j(k)/2), \quad \eta_{n+j} := \eta_{n+j}(k) = -\eta_j(k), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{6}$$

де $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ — корені рівняння $P(\lambda,k) := \sum\limits_{|\widehat{s}|^* \leqslant 2n} A_{\widehat{s}} (ik_1)^{s_1} \cdots (ik_p)^{s_p} \lambda^{s_0} = 0$.

Вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\eta_1(k), \ldots, \eta_n(k), -\eta_1(k), \ldots, -\eta_n(k)$ рівняння (5) є різними, а отже, відмінними від нуля; не порушуючи загальності, припускаємо, що $\operatorname{Re}\eta_j(k) \geqslant 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для λ-коренів полінома $P(\lambda, k)$ справедливі оцінки (див. [12, с. 101])

$$|\lambda_j(0)| \leqslant 2 \max_{s_0 \in \{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{|A_{(s_0,0,\ldots,0)}|}, \qquad |\lambda_j(k)| \leqslant c_1 |k|^2,$$
$$k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}; \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{7}$$

де $c_1 = 2 \max\limits_{s_0 \in \{0,\ldots,n-1\}} \sqrt[n-s_0]{\sum\limits_{|s| \leqslant 2(n-s_0)} |A_{(s_0,s_1,\ldots s_p)}|}$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ рівняння (3) має, відповідно, таку фундаментальну систему розв'язків: $\{u_{kj}(t) = \exp(\eta_j(k)t), u_{k,n+j}(t) = \exp(-\eta_j(k)t), j \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Характеристичний визначник [13] задачі (3), (4) обчислюється за формулою

$$\Delta(k, T) = (-1)^n \prod_{1 \leqslant s < l \leqslant n} (\eta_l^2 - \eta_s^2)^2 \prod_{j=1}^{n} ((e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T})\eta_j), \qquad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Відомо [13], що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ задача (3), (4) має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(k, T) \neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}')$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p, \forall m \in \mathbb{Z}) \qquad i\eta_j(k)T \neq \pi\left(m + \frac{1}{2}\right), \qquad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [5].

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (8). *Якщо* $\varphi_j \in \mathcal{T}'(\mathcal{T})$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0, T]; \mathcal{T}')$ $(C^{2n}([0, T]; \mathcal{T}))$; *цей розв'язок визначає формула*

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geqslant 0} u_k(t) e^{(ik,x)} :=$$
$$:= \sum_{|k| \geqslant 0} \sum_{q,j=1}^{n} S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk}\eta_q(e^{-\eta_q t} + e^{-2\eta_q T + \eta_q t}) + \varphi_{n+j,k}(e^{\eta_q t - \eta_q T} - e^{-\eta_q t - \eta_q T})}{(-1)^{n+j}\eta_q(1 + e^{-2\eta_q T}) \prod\limits_{s=1, s \neq q}^{n} (\eta_q^2 - \eta_s^2)} e^{(ik,x)}, \tag{9}$$

де $S_l^{(q)}$, $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, *— сума всіх можливих добутків елементів* $\eta_1^2, \ldots, \eta_{q-1}^2, \eta_{q+1}^2, \ldots, \eta_n^2$, *узятих по* l *штук у кожному добутку,* $S_0^{(q)} \equiv 1$.

При доведенні теореми 2 використано теорему 6.2 з [11, с. 111] (згідно з якою в просторі $\mathcal{T}'$ довільний тригонометричний ряд є збіжним) і той факт, що простір $\mathcal{T}$ неперервно вкладається в простір $\mathcal{T}'$.

3. Для інших просторів, зокрема для шкали просторів $C^{2n}([0, T], H_q(\Omega^p))$, $q \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо модулі виразів $\eta_q(k)$, $\eta_q^2(k)-\eta_s^2(k)$, $1+e^{-2\eta_q T}$, q, $s\in\{1,\dots,n\}$, $q\neq s$, які входять множниками у знаменники членів ряду (9), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорема 3. *Нехай справджуються умови* (8) *та існують такі додатні сталі* c_2, c_3, c_4, α_1, α_2, α_3, *що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *правильними є оцінки*

$$|\eta_q(k)|\geqslant c_2(1+|k|)^{-\alpha_1},\qquad q\in\{1,\dots,n\}, \tag{10}$$

$$\prod_{s=1,s\neq q}^{n}|\eta_q^2(k)-\eta_s^2(k)|\geqslant c_3(1+|k|)^{-\alpha_2},\qquad q\in\{1,\dots,n\}, \tag{11}$$

$$|1+e^{-2\eta_q(k)T}|\geqslant c_4(1+|k|)^{-\alpha_3},\qquad q\in\{1,\dots,n\}. \tag{12}$$

Якщо $\varphi_s\in H_{\chi+q}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{\chi+\alpha_1+q}(\Omega^p)$, $s\in\{1,\dots,n\}$, $\chi=2n-2+\alpha_2+\alpha_3$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$. *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\|\leqslant c_5\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{\chi+q}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{\chi+\alpha_1+q}\|\right),$$

де $c_5=c_5(A_{\widehat{s}},|\widehat{s}|^*\leqslant 2n;n,c_2,c_3,c_4)$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 3 з [5].

З'ясуємо можливість виконання оцінок (10)–(12). Нехай $b=(b_1,\dots,b_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ та $d==(d_1,\dots,d_\beta)\in\mathbb{Z}^\beta$ — вектори, складені, відповідно, із дійсних та уявних частин коефіцієнтів $A_{(0,s)}$ рівняння (1), де β — кількість розв'язків у цілих невід'ємних числах нерівності $s_1+s_2+\dots+s_p\leqslant 2n$.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d, *або для довільного фіксованого вектора* b *і майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* d *нерівності* (10) *та* (11) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_1>n+p/2-1$ *та* $\alpha_2>(n-1)p/2$.

Доведення здійснюється за схемою доведення теорем 4.4 та 4.5 з [4, с. 62–63], відповідно, із урахуванням формул (6), оцінок (7) та теореми Вієта.

Лема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d *(або для майже всіх векторів* d *і довільного фіксованого вектора* b*) нерівності* (12) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\alpha_3>3p/2+n$.

Доведення грунтується на лемі 1, лемі 2.2 з [4, с. 15], лемі Бореля–Кантеллі (див. лему 1 із [14, с. 10]) та частковому використанні схеми доведення леми 4 з [3].

Із теореми 3 та лем 1, 2 випливає таке твердження.

Наслідок. *Якщо* $\varphi_s\in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi>(pn)/2+3n+p-2$, $s\in\{1,\dots,n\}$, *то, за умов* (8), *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d *(або для майже всіх векторів* d *і довільного фіксованого вектора* b*) у просторі* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2); *цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_j, $j\in\{1,\dots,2n\}$.

Наведемо частинні випадки рівняння (1), для яких отримано кращі оцінки знизу малих знаменників, ніж у лемах 1 і 2, а отже, і слабші умови на вихідні дані у теоремах існування розв'язку задачі (1), (2) зі шкали просторів $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$, $q\in\mathbb{R}$.

4. Розглянемо рівняння з факторизованим оператором

$$\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\sum_{s=1}^{p}a_{js}\frac{\partial}{\partial x_s}+b_j\right)^2\right]u(t,x)=0,\qquad (t,x)\in D,\qquad a_{js},b_j\in\mathbb{C}. \tag{13}$$

Позначимо:

$$a_{js}^{(1)}=\operatorname{Re}a_{js},\quad a_{js}^{(2)}=\operatorname{Im}a_{js},\quad b_j^{(1)}=\operatorname{Re}b_j,\quad b_j^{(2)}=\operatorname{Im}b_j,\quad j\in\{1,\ldots,n\},\quad s\in\{1,\ldots,p\};$$

$$\overline{a}_1=\left(\frac{a_{11}^{(1)}}{b_1^{(2)}},\ldots,\frac{a_{1p}^{(1)}}{b_1^{(2)}},\frac{a_{21}^{(1)}}{b_2^{(2)}},\ldots,\frac{a_{2p}^{(1)}}{b_2^{(2)}},\ldots,\frac{a_{n1}^{(1)}}{b_n^{(2)}},\ldots,\frac{a_{np}^{(1)}}{b_n^{(2)}}\right),$$

$$\overline{a}_2=\left(\frac{a_{11}^{(2)}}{b_1^{(1)}},\ldots,\frac{a_{1p}^{(2)}}{b_1^{(1)}},\frac{a_{21}^{(2)}}{b_2^{(1)}},\ldots,\frac{a_{2p}^{(2)}}{b_2^{(1)}},\ldots,\frac{a_{n1}^{(2)}}{b_n^{(1)}},\ldots,\frac{a_{np}^{(2)}}{b_n^{(1)}}\right);$$

$$\eta_j^*(k):=b_j+i\sum_{s=1}^{p}a_{js}k_s,\qquad j\in\{1,\ldots,n\}.$$

З теореми 1 випливає: для єдиності розв'язку задачі (2), (13) у просторі $C^{2n}([0,T],\mathcal{T}')$ необхідно і достатньо, щоб справджувались умови

$$(\forall k\in\mathbb{Z}^p,\forall m\in\mathbb{Z})\qquad i\eta_j^*(k)T\neq\pi\left(m+\frac{1}{2}\right),\qquad j\in\{1,\ldots,n\}. \tag{14}$$

На підставі леми 2 та теореми Грошева [15] встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T\in(0,+\infty)$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^{np}$) векторів $\overline{a}_1$ і довільного фіксованого вектора $\overline{a}_2$ (або для майже всіх векторів $\overline{a}_2$ і довільного фіксованого вектора $\overline{a}_1$) нерівності (10)–(12), у яких покладено $\eta_j(k)=\eta_j^*(k)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ при $\alpha_1>p/n$, $\alpha_2>2p$ і $\alpha_3>p+p/n+1$, відповідно.

Теорема 4. *Нехай справджуються умови* (14). *Якщо* $\varphi_s\in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s}\in H_{q+\chi+p/n}(\Omega^p)$, $\chi>2n+3p+p/n-1$, $s\in\{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{np}$*) векторів* $\overline{a}_1$ *і довільного фіксованого вектора* $\overline{a}_2$ *(або для майже всіх векторів* $\overline{a}_2$ *і довільного фіксованого вектора* $\overline{a}_1$*) у просторі* $C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2), (16). *Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\|u;C^{2n}([0,T],H_q(\Omega^p))\|\leqslant c_6\left(\sum_{s=1}^{n}\|\varphi_s;H_{q+\chi}\|+\sum_{s=n+1}^{2n}\|\varphi_s;H_{q+\chi+p/n}\|\right).$$

5. Розглянемо випадок, коли рівняння (1) є гіперболічним за Гордінгом. Тоді, згідно з припущенням п. 2, корені $\eta_j(k)$ рівняння (5) справджують оцінки

$$\operatorname{Re}\eta_j(k)\leqslant h,\qquad h\geqslant 0,\qquad j\in\{1,\ldots,2n\},\qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{15}$$

На підставі елементарної нерівності $\sin x\geqslant 2x/\pi$, $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, формул (6), оцінок (7), (15) та леми 2.4 [4, с. 17] встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$)

чисел T та довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння (1) нерівності (12) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\alpha_3 > p$.

Теорема 5. *Нехай рівняння* (1) *є гіперболічним за Гордінгом і справджуються умови* (8)*. Якщо* $\varphi_s \in H_{q+\chi}(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{q+\chi+p/2+n-1}(\Omega^p)$, $\chi > 2(n-1) + p/2(n+1)$, $s \in \in \{1, \ldots, n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\beta$*) векторів* b *і довільного фіксованого вектора* d *(або для майже всіх векторів* d *і довільного фіксованого вектора* b*) у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2)*. Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\| \leqslant c_7 \left(\sum_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_{q+\chi}\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \|\varphi_s; H_{q+\chi+p/2+n-1}\| \right).$$

6. Тепер розглянемо задачу з умовами (2) для рівняння

$$\sum_{|\widehat{s}|^*=2n} A_{\widehat{s}} \frac{\partial^{|\widehat{s}|^*} u(t,x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad (t,x) \in D, \qquad A_{\widehat{s}} \in \mathbb{R}, \qquad A_{(n,0,\ldots,0)} = 1, \tag{16}$$

яке є строго гіперболічним за Петровським.

Для єдиності розв'язку задачі (2), (16) у просторі $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \forall m \in \mathbb{Z}_+) \qquad |k|\mu_j(k)T \neq \pi\left(m + \frac{1}{2}\right), \qquad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{17}$$

де $\mu_1(k), \ldots, \mu_n(k)$ — додатні корені рівняння $\sum\limits_{|\widehat{s}|^*=2n} A_{\widehat{s}} (k_1/|k|)^{s_1} \ldots (k_p/|k|)^{s_p} \mu^{2s_0} = 0$, $k \in \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

Якщо $\varphi_j \in \mathcal{T}'$, $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, то за умов (17) існує єдиний розв'язок задачі (2), (16) з простору $C^{2n}([0,T], \mathcal{T}')$; цей розв'язок визначає формула

$$u(t,x) = u_0(t) + \\ + \sum_{|k|>0} \sum_{q,j=1}^{n} \frac{S_{n-j}^{(q)} [\varphi_{jk} |k| \mu_q(k) \cos(\mu_q(k)|k|(T-t)) - \varphi_{n+j,k} \sin(\mu_q(k)|k|t)]}{(-1)^{n+j} |k| \mu_q(k) \cos(\mu_q(k)|k|T) \prod\limits_{s=1, s\neq q}^{n} (\mu_s^2(k) - \mu_q^2(k))} e^{(ik,x)}, \tag{18}$$

де $u_0(t)$ — многочлен степеня $2n-1$; $S_l^{(q)}$, $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, — сума всіх можливих добутків елементів $\mu_1^2(k), \ldots, \mu_{q-1}^2(k)$, $\mu_{q+1}^2(k), \ldots, \mu_n^2(k)$, узятих по l штук у кожному добутку, $S_0^{(q)} \equiv \equiv 1$.

Теорема 6. *Нехай справджуються умови* (17)*. Якщо* $\varphi_s \in H_\chi(\Omega^p)$, $\varphi_{n+s} \in H_{\chi-1}(\Omega^p)$, $\chi > q + p$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *та для довільних фіксованих коефіцієнтів рівняння* (16) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (16), (2)*. Цей розв'язок справджує нерівність*

$$\|u; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^p))\| \leqslant c_{12} \left(\sum_{s=1}^{n} \|\varphi_s; H_\chi\| + \sum_{s=n+1}^{2n} \|\varphi_s; H_{\chi-1}\| \right).$$

Доведення грунтується на тому, що в області строгої гіперболічності рівняння (16) справджуються оцінки $c_8 \leqslant \mu_q(k) \leqslant c_9$, $c_{10} \leqslant |\mu_s^2(k) - \mu_q^2(k)| \leqslant c_{11}$, $s, q \in \{1, \ldots, n\}$, $s \neq q$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівності $|\cos(\mu_q(k)|k|T)| \geqslant T|k|^{-p-\varepsilon}$, $q \in \{1, \ldots, n\}$, $0 < \varepsilon < 1$, справджуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$; останнє твердження доводиться за схемою доведення леми 2 з [5].

Результати роботи можна поширити на випадок системи рівнянь вигляду (1).

1. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
2. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь з частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.
3. *Симотюк М. М.* Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь з частинними похідними // Мат. вісник НТШ. – 2005. – **2**. – С. 199–212.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 15–28.
6. *Павленко В. Н., Петраш Т. А.* Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – **18**, № 2. – С. 199–204.
7. *Gentile G., Mastropietro V., Procesi M.* Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions // Commun. Math. Phys. – 2005. – **256**, No 2. – P. 437–490.
8. *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions // Russian Math. – 2007. – **51**, No 2. – P. 44–52.
9. *Korzyuk V. I., Konopel'ko O. A.* Strong solution of boundary value problems in cylindrical domains for a four-order equation of composite type // Different. Equat. – 2010. – **46**, No 5. – P. 690–701.
10. *Zikirov O. S.* A non-local boundary value problem for third-order linear partial differential equation of composite type // Math. Modelling and Analysis. – 2009. – **47**, No 3. – P. 407–421.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – Москва: Наука, 1972. – 304 с.
13. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
14. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Наука, 1977. – 144 с.
15. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм // Докл. АН СССР, 1938. – **19**, № 3. – С. 151–152.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло до редакції 02.10.2014

Член-корреспондент НАН Украины **Б. И. Пташник, С. М. Репетило**

Задача Дирихле–Неймана для линейных неэллиптических уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами

В области, являющейся декартовым произведением отрезка на многомерный тор, исследована краевая задача с условиями Дирихле–Неймана по выделенной переменной и условиями периодичности по другим координатам для линейных общих (независимо от типа) урав-

нений с частными производными высокого порядка с постоянными коэффициентами, изотропных относительно порядка дифференцирования по независимым переменным. Установлены условия однозначной разрешимости задачи и конструктивно построено ее решение в виде ряда по системе ортогональных функций. Для оценок снизу малых знаменателей, возникших при построении решения задачи, использован метрический подход.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **B. Yo. Ptashnyk, S. M. Repetylo**

The Dirichlet–Neumann problem for linear nonelliptic partial differential equations with constant coefficients

In the domain, which is the Cartesian product of a segment and a multidimensional torus, we study the boundary value-problem with Dirichlet-Neumann conditions with respect to the selected variable and conditions of periodicity with respect to other coordinates for general (regardless of type) linear partial differential equations of a high order with constant coefficients, isotropic in the order of differentiation with respect to independent variables. We establish conditions for the unique solvability of the problem and structurally built the solution in the form of a series in a system of orthogonal functions. To estimate the small denominators arising in the construction of a solution to the problem from below, we use the metric approach.