УДК 517.36

Академик НАН Украины **А. А. Мартынюк**

Об одном способе оценки решений квазилинейных систем

Для оценки решений квазилинейных систем уравнений возмущенного движения предложен способ оценки нормы решений на основе одного нелинейного интегрального неравенства.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений возмущенного движения некоторой механической системы в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; $A(t)$ — $n \times n$ — матрица с непрерывными на любом конечном интервале элементами. Уравнения (1) могут рассматриваться как возмущение системы линейных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

Свойства устойчивости и ограниченности решений системы (1) часто исследуются путем сравнения со свойствами решений уравнений (2) (см., например, [1–3]).

В данной работе свойства решений уравнения (1) исследуются на основании одного нелинейного интегрального неравенства. Это позволяет расширить предположения о системе уравнений (2) по сравнению с упомянутым подходом.

Установим вначале оценку нормы решений $x(t)$ системы (1) при таких предположениях:

A1. Существует неотрицательная интегрируемая функция $b(t)$ при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ такая, что

$$\|A(t)\| \leqslant b(t) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

A2. Существует неотрицательная интегрируемая функция $c(t)$ при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и постоянная $\alpha > 1$ такие, что

$$\|f(t, x)\| \leqslant c(t)\|x\|^\alpha$$

при всех $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times D$, где $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant d\}$.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений* (1) *выполняются условия предположений A1, A2. Тогда для нормы решений* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *верна оценка*

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{\|x_0\| \exp \int\limits_{t_0}^{t} b(s)\, ds}{\left[1 - (\alpha - 1)\|x_0\|^{\alpha-1} \int\limits_{t_0}^{t} c(s) \exp\left((\alpha - 1) \int\limits_{t_0}^{s} b(\tau)\, d\tau\right) ds\right]^{1/(\alpha-1)}} \tag{3}$$

при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, как только

$$(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\exp\left((\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)\,d\tau\right)ds < 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ — решение системы уравнений (1) с начальными значениями $x(t_0) = x_0$, $t_0 \geqslant 0$. Из уравнения (1) при условиях A1, A2 получим оценку нормы решения $x(t)$ в виде

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} b(s)\|x(s)\|\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} c(s)\|x(s)\|^{\alpha} ds. \tag{5}$$

Неравенство (5) преобразуем к псевдолинейному неравенству (см. [4]):

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} (b(s) + c(s)\|x(s)\|^{\alpha-1})\|x(s)\|\,ds, \tag{6}$$

и применив лемму Гронуолла–Беллмана [1], получим оценку

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} (b(s) + c(s)\|x(s)\|^{\alpha-1})\,ds\right) \tag{7}$$

при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Обозначим $\|x(t)\| = \psi(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ и перепишем неравенство (7) в виде

$$\psi^{\alpha-1}(t) \leqslant \|x_0\|^{\alpha-1}\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} (b(s) + c(s)\psi^{\alpha-1}(s))\,ds\right]. \tag{8}$$

Умножив обе стороны неравенства (8) на выражение

$$-(\alpha-1)c(s)\exp\left(-(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\psi^{\alpha-1}(s)\,ds\right),$$

получим

$$-(\alpha-1)c(t)\psi^{\alpha-1}(t)\exp\left[-(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\psi^{k-1}(s)\,ds\right] \geqslant$$

$$\geqslant -(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}c(t)\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right],$$

откуда следует, что

$$-(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}c(t)\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right] \leqslant \frac{d}{dt}\left[\exp\left(-(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\psi^{\alpha-1}(s)\,ds\right)\right].$$

Интегрируя это неравенство в пределах от t_0 до t, находим

$$1-(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{s} b(\tau)\,d\tau\right]ds \leqslant \exp\left[-(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\psi^{\alpha-1}(s)\,ds\right]. \quad (9)$$

При выполнении условия (3) из оценки (9) следует

$$\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\psi^{\alpha-1}(s)\,ds\right] \leqslant \frac{1}{1-(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\exp\left((\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{s} b(\tau)\,d\tau\right)ds}.$$

При этом неравенство (7) примет вид

$$\psi^{\alpha-1}(t) \leqslant \|x_0\|^{\alpha-1}\frac{\exp\left[(\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{t} b(s)\,ds\right]}{1-(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\exp\left((\alpha-1)\int\limits_{t_0}^{s} b(\tau)\,d\tau\right)ds},$$

из которого следует оценка $\|x(t)\|$ при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При получении оценки нормы решений квазилинейных уравнений обычно применяется лемма Гронуолла–Беллмана [1–3]. Неравенство (5) является частным случаем неравенства (1.4.9) из монографии [5]. Однако применение псевдолинейного неравенства (6) в контексте с леммой Гронуолла–Беллмана упрощает получение оценки для нормы решений системы (1) и имеет определенный интерес для приложений.

Оценка (3) позволяет установить условия ограниченности и устойчивости решения системы (1) в следующем виде.

Теорема 2. *Если выполняются условия A_1, A_2 теоремы 1 при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и существует постоянная $\beta > 0$ такая, что $\|x(t)\|_{(3)} < \beta$ при всех $t \geqslant t_0$, где β может зависеть от каждого решения, то решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) ограничено.*

Теорема 3. *Если выполняются условия A_1, A_2 теоремы 1 при всех $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times D$ и $f(t,x) = 0$ при $x = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geqslant 0$ существуют $\delta(t_0,\varepsilon) > 0$ такие, что, если $\|x_0\| < \delta(t_0,\varepsilon)$, выполняется оценка $\|x(t)\|_{(3)} < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, то нулевое решение системы (1) устойчиво.*

Доказательства утверждений теорем 2, 3 следуют непосредственно из оценки нормы решений $x(t)$ в форме (3). Символы $\|x(t)\|_{(3)} < \beta$ и $(\|x(t)\|_{(3)} < \varepsilon)$ означают, что этим неравенствам должна удовлетворять правая часть неравенства (3) при соответствующих начальных условиях.

Пример. Рассмотрим существенно нелинейную систему (например, систему (1) при $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{10}$$

Если выполняется условие A_2 с функцией $c(t)$ такой, что

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} c(t)\,dt > 0$$

при любых $(t_k, t_{k+1}) \in \mathbb{R}_+$, $t_k < t_{k+1}$, то

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} c(s)\|x(s)\|^{\alpha} ds.$$

Нетрудно показать, что если

$$(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\,ds < 1$$

при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, то

$$\|x(t)\| \leqslant \frac{\|x_0\|}{\left(1-(\alpha-1)\|x_0\|^{\alpha-1}\int\limits_{t_0}^{t} c(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)}} \tag{11}$$

при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Замечание 2. Оценка (11) получается такой же на основе леммы Бихари (см. [7] и библиографию там). Это иллюстрирует эквивалентность подходов, основанных на применении леммы Бихари и псевдолинейного неравенства при исследовании поведения нормы решений нелинейной системы (1).

1. *Bellman R.* Stability theory of differential equations. – New York: Dover, 1953. – 166 p.
2. *Coddington E. A., Levinson N.* Theory of ordinary differential equations. – New York: McGraw-Hill, 1955. – 429 p.
3. *Rao M. R. M.* Ordinary differential equations. – New Delhi-Madras: Affiliated East-West Press, 1980. – 266 p.
4. *Louartassi Y., El Mazoudi El H., Elalami N.* A new generalization of lemma Gronwall–Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – **13**, No 6. – P. 621–628.
5. *Мартынюк А. А., Гутовский Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 271 с.
6. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: Метод интегральных неравенств. – Киев: Наук. думка, 1989. – 271 с.
7. *Pachpatte B. G.* Inequalities for differential and integral equations. – San Diego: Academic Press, 1998. – 611 p. – 271 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.08.2014

Академік НАН України **А. А. Мартинюк**

Про один спосіб оцінки розв'язків квазілінійних систем

Для оцінки розв'язків квазілінійних систем рівнянь збуреного руху запропоновано спосіб оцінки норми розв'язків на основі однієї нелінійної інтегральної нерівності.

Academician of the NAS of Ukraine **A. A. Martynyuk**

On a method for estimating the solutions of quasilinear systems

To estimate the solutions of quasilinear systems of equations of perturbed motion, an estimation method is proposed on the basis of a nonlinear integral inequality.