ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.94

З. Н. Гладкая

О решениях уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Установлена разрешимость задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки, а также скорость убывания решений в зависимости от гладкости потенциала.

Как известно, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), который был впервые применен для решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$q_t = -q_{xxx} + 6qq_x, \tag{1}$$

с убывающими начальными данными $q(x, 0) = q(x)$, не позволяет решить данную задачу в том же классе, каковыми являются начальные данные. Происходят "потери" в гладкости и скорости убывания решения [1]. В частности, если мы хотим иметь классическое решение $q(x, t)$ уравнения (1), убывающее в смысле $L_1(\mathbb{R})$, то максимально широкий класс начальных данных, обеспечивающих такое решение методом МОЗР — это функции, имеющие шесть производных, суммируемых со вторым моментом. Методы, используемые в теории уравнений в частных производных (PDE), позволяют существенно расширить классы начальных данных, например до $L_2(\mathbb{R})$, но при этом решение понимается в слабом смысле [2]. Оба указанных подхода позволяют также доказать разрешимость уравнения КдФ в классе Шварца.

Задача Коши для уравнения (1) с начальными данными типа ступеньки

$$q(x) \to c_\pm, \qquad x \to \pm\infty, \qquad c_- \neq c_+, \qquad c_\pm \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

исследована меньше, и методы PDE оказываются здесь не эффективными. Для уравнения КдФ методом МОЗР в работе [3] доказано, что у задачи (1), (2) с начальными данными

$$\int_0^{+\infty} ((1 + |x|^N)|q(x)| + (1 + |x|)|q(-x) + c^2|)\, dx < \infty \tag{3}$$

© З. Н. Гладкая, 2015

при достаточно большом N есть слабое решение из $L_2(\mathbb{R})$ при каждом t. Кроме того, для начальных данных $q(x)$, асимптотически близких к двум разным конечнозонным потенциалам $p_+(x)$ и $p_-(x)$ на разных полуосях, получен следующий результат:

Теорема [4]. *Пусть $p_\pm(x,t)$ — это два конечнозонных решения уравнения (1), соответствующих конечнозонным начальным данным $p_\pm(x)$. Пусть $m \geqslant 8$ и $n \geqslant m+5$ — заданные натуральные числа и пусть*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\pm} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s}(q(x) - p_\pm(x)) \right| (1+|x|^m)\, dx < \infty, \qquad 0 \leqslant s \leqslant n. \tag{4}$$

Тогда при всех $t \in [-T,T]$ существует единственное решение $q(x,t)$ задачи (1), (4) такое, что при $0 \leqslant s \leqslant n-m-2$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\pm} \left(\left| \frac{\partial^s}{\partial x^s}(q(x,t) - p_\pm(x,t)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t}(q(x,t) - p_\pm(x,t)) \right| \right) \left(1 + |x|^{[\frac{m}{2}]-2}\right) dx < \infty. \tag{5}$$

Нашей целью является уточнение этих результатов на случай начальных данных класса $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$.

Определение 1. Пусть $c_+,\ c_- \in \mathbb{R}$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, $m,n \in \mathbb{N}$ — это заданные числа. Функция $q(x)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$, если $q^{(n)} \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и

$$\int\limits_0^{+\infty} (|q(x) - c_+| + |q(-x) - c_-| + |q^{(i)}(x)| + |q^{(i)}(-x)|)(1+|x|^m)dx < \infty, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m \geqslant 3$ и $n \geqslant m+3$ — заданные целые числа. Тогда задача Коши (1), (2) с начальными данными $q(x) \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ при всех $t \in [-T,T]$ имеет единственное решение $q(x,t)$ такое, что $q(\cdot,t) \in \mathcal{L}^{n-m}_{[\frac{m+1}{2}]-2}(c_+, c_-)$, $\dfrac{\partial}{\partial t} q(\cdot,t) \in \mathcal{L}^{n-m}_{[\frac{m+1}{2}]-2}(0,0)$.*

Объясним вкратце структуру доказательства, полагая для простоты $c_+ = 0$, $c_- = -c^2$. Известно [5, 6], что спектр оператора Шредингера $L = -d^2/dx^2 + q(x)$ с потенциалом $q(x) \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ из абсолютно непрерывного спектра на множестве $[-c^2, +\infty)$, однократного на $[-c^2, 0]$ и двукратного на $\mathbb{R}_+$, и конечного числа собственных значений $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p < -c^2$. Введем два новых спектральных параметра $k_\pm$ по формуле $\lambda = k_+^2 = k_-^2 - c^2$, являющихся взаимно однозначными отображениями на множествах $\lambda \in \operatorname{clos}(\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty))$, $k_+ \in \operatorname{clos}(\mathbb{C}^+ \setminus (0, \mathrm{i}c))$, $k_- \in \operatorname{clos}\mathbb{C}^+$, где $\operatorname{clos} A$ означает замыкание множества A. Решения Йоста уравнения $Ly = \lambda y$ можно представить в виде [7]

$$\phi_\pm(\lambda, x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_\pm x} \pm \int\limits_x^{\pm\infty} K_\pm(x,y) \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k_\pm y} dy, \tag{6}$$

где $K_\pm(x,y)$ — ядра операторов преобразования, причем $K_+(x,x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_x^{+\infty} q(y)\, dy$, $K_-(x,x) = \dfrac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} (q(y) + c^2)\, dy$. Для каждого собственного значения λ_s определим нормировочные константы $\gamma_s^{\pm} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \phi_{\pm}{}^2(\lambda_s, x)\, dx\right)^{-1}$ и введем матрицу рассеяния $S(\lambda) = \begin{pmatrix} T_-(\lambda) & R_+(\lambda) \\ R_-(\lambda) & T_+(\lambda) \end{pmatrix}$, где $R_{\pm}$ и $T_{\pm}$ — правые и левые коэффициенты отражения и прохождения. Известно, что при $q \in \mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$ данные рассеяния

$$\mathcal{S} = \{R_+(\lambda), T_+(\lambda), k_+ \in \mathbb{R};\ R_-(\lambda), T_-(\lambda), k_- \in \mathbb{R}; \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \setminus [-c^2, \infty),$$
$$\gamma_1^{\pm}, \ldots, \gamma_p^{\pm} \in \mathbb{R}_+\} \tag{7}$$

имеют следующие свойства:

I. $S(\lambda + \mathrm{i}0) = \overline{S(\lambda - \mathrm{i}0)}$ при $\lambda \in [-c^2, \infty)$; $S(\lambda) = \mathrm{I} + O((\lambda)^{-1/2})$, при $\lambda \to \infty$; $(\overline{T}_-(\lambda))^{-1} T_-(\lambda) = R_-(\lambda)$ при $k_- \in [-c, c]$;
$1 - |R_+(\lambda)|^2 = 1 - |R_-(\lambda)|^2 = \overline{T_+(\lambda)} T_-(\lambda)$,
$\overline{R_+(\lambda)} T_+(\lambda) + R_-(\lambda) \overline{T_+(\lambda)} = 0$, $k_+ \in \mathbb{R}$.

II. Функции $T_+(\lambda)$ и $T_-(\lambda)$ аналитически продолжаются в область $\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)$ и удовлетворяют там тождеству $k_+ T_+^{-1}(\lambda) = k_- T_-^{-1}(\lambda) =: W(\lambda)$, где функция $W(\lambda)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)$ и непрерывна вплоть до границы. При этом $W(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \operatorname{clos}(\mathbb{C} \setminus [-c^2, \infty)) \setminus \left(\{-c^2\} \bigcup\limits_{s=1}^{p} \{\lambda_s\}\right)$, а в точках λ_k $W(\lambda_k) = (\gamma_k^+ \gamma_k^-)^{-2}$. Если $W(-c^2) = 0$, то $W(\lambda) = \mathrm{i}\alpha\sqrt{\lambda + c^2}(1 + o(1))$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Функция $R(\lambda)$ непрерывна при $k_+ \in \mathbb{R}$ и $R(0) = -1$. Функция $R_-(\lambda)$ непрерывна при $k_- \in \mathbb{R}$. Если $W(-c^2) \neq 0$, то $R_-(-c^2) = -1$.

Операторы преобразования и данные рассеяния связаны между собой уравнениями Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ)

$$K_{\pm}(x, y) + F_{\pm}(x + y) \pm \int\limits_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x, s) F_{\pm}(s + y)\, ds = 0, \qquad \pm x \leqslant \pm y \tag{8}$$

с ядрами $F_{\pm}(x) = F_{c,\pm}(x) + F_{d,\pm}(x)$, где

$$F_{c,+}(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\mathbb{R}} R_+(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+ x} dk_+ + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-c^2}^{0} \frac{|T_-(\lambda)|^2}{k_-} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+ x} d\lambda, \tag{9}$$

$$F_-(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\mathbb{R}} R_-(\lambda) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_- x} dk_-,$$

$$F_{d,\pm} = \sum_{s=1}^{p} \gamma_s^{\pm} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\kappa_s^{\pm} x}, \qquad \kappa_+ = \sqrt{\lambda_s}, \qquad \kappa_- = \sqrt{\lambda_s + c^2}.$$

Эти ядра обладают следующим свойством:

III. $F_{\pm}^{(n+1)} \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $x^m F_{\pm}^{(s)}(x) \in L_1(\mathbb{R}_{\pm})$, $s = 1, \ldots, n + 1$.

Как показано в [8], условия **I–III** являются необходимыми и достаточными, чтобы множество $\mathcal{S}$ было множеством данных рассеяния для оператора Шредингера с потенциалом из класса $\mathcal{L}_m^n(0, -c^2)$, где $n \geqslant 0$ и $m \geqslant 1$ — фиксированные числа.

Доказательство достаточности состоит в решении обратной задачи рассеяния. Выберем множество $\mathcal{S}$, которое удовлетворяет свойствам **I–III**. Тогда уравнения ГЛМ имеют единственные решения $K_{\pm}(x, y)$ такие, что функции $q_{\pm}(x) = \mp 2 \dfrac{d}{dx} K_{\pm}(x, x)$ убывают в следующем смысле: $q_{\pm}^{(n)} \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и $x^m q_{\pm}{}^{(i)}(x) \in L_1(\mathbb{R}_{\pm})$. Имеет место следующее утверждение [8]:

при условиях **I–III** *на множество* $\mathcal{S}$ *функции* $q_-(x) - c^2$ *и* $q_+(x)$ *совпадают.* Более того, эта теорема единственности обратной задачи допускает следующее обобщение:

Лемма 1. *Пусть множество* $\mathcal{S}$ *удовлетворяет свойствам* **I** *и* **II**, *а функции* $F_\pm$, $F'_\pm \in \in L_1(\mathbb{R}_\pm) \bigcup L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, *тогда уравнения ГЛМ имеют единственные решения такие, что* $q_\pm \in \in L_1(\mathbb{R}_\pm) \bigcup L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, *и* $q_+ \equiv q_- - c^2$.

Эти результаты являются основой МОЗР для задачи Коши для уравнения (1), формализм которого состоит в следующем. Рассмотрим начальные данные задачи Коши $q(x, 0) \in \in \mathcal{L}_m^n(c_+, c_-)$ как потенциал ассоциированного оператора Шредингера и решим прямую задачу рассеяния. Мы получим множество данных рассеяния $\mathcal{S}(0)$. Предположим, что решение задачи Коши существует и является функцией класса $\mathcal{L}_{m_1}^{n_1}(\mathrm{c}_+, \mathrm{c}_-)$ при каждом t и при возможно меньших, чем m и n, величинах m_1 и n_1. Тогда можно посчитать эволюцию данных рассеяния [9] (например, $R_+(\lambda, t) = R_+(\lambda)\mathrm{e}^{8\mathrm{i}k_+^3 t}$ при $k_+ \in \mathbb{R}$) и естественным образом возникает множество

$$\mathcal{S}(t) = \{R_+(\lambda, t), T_+(\lambda, t), R_-(\lambda, t), T_-(\lambda, t), \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \gamma_1^\pm, \ldots, \gamma_p^\pm(t) \in \mathbb{R}_+\},$$

которое трактуется как множество данных рассеяния для некоторого потенциала $q(x, t)$. Как правило, в приложениях, связанных с методом обратной задачи рассеяния, автоматически считается, что решение задачи (1), (2) найдено, как только написана эволюция данных рассеяния. На самом деле множество $\mathcal{S}(t)$ появилось в предположении существования решения класса $\mathcal{L}_{m_1}^{n_1}(c_+, c_-)$, поэтому, чтобы обосновать применение МОЗР, нужно проверить, что полученное множество $\mathcal{S}(t)$ действительно удовлетворяет условиям **I–III** хотя бы при каких-то m_1 и n_1. Условия **I** и **II** проверяются элементарно. Основную сложность составляет проверка того факта, что ядра $F_\pm(x, t) = F_{c,\pm}(x, t) + F_{d,\pm}(x, t)$ зависящего от времени уравнения ГЛМ с

$$F_{c,+}(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} R_+(\lambda)\psi(-\mathrm{i}k_+, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+ x} dk_+ + \frac{1}{4\pi} \int_{-c^2}^{0} |T_-(\lambda)|^2 \psi(-\mathrm{i}k_+, t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_+ x} \frac{d\lambda}{k_-}, \quad (10)$$

$$F_{c,-}(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} R_-(\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_- x}\psi(\mathrm{i}k_-, t)\, dk_-, \quad (11)$$

$$F_{\pm,d}(x, t) = \sum_{s=1}^{p} \gamma_s^\pm \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\kappa_\pm x}\psi(\pm\mathrm{i}\kappa_\pm, t),$$

где $\psi(h, t) := \mathrm{e}^{8h^3 t}$, удовлетворяют условию **III**.

Прежде всего заметим, что слагаемые $F_{d,\pm}(x, t)$, соответствующие дискретному спектру, являются гладкими функциями по x и t и при $t \in [-T, T]$ и $x \to \pm\infty$ допускают оценки

$$\left| \frac{\partial^{s+1}}{\partial x^s \partial t} F_{\pm,d}(x, t) \right| \leqslant C(T)\sqrt{(|\lambda_0| + 1)^{3+s}}\mathrm{e}^{8\sqrt{|\lambda_0|^3}T} e^{-\sqrt{\lambda_p + c^2}|x|}, \quad (12)$$

т. е. условие **III** для этих слагаемых выполнено.

При оценке остальных слагаемых мы используем интегрирование по частям, где интегрируется множитель $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k_\pm x}$, при этом возникают множители x^{-s} перед интегралами. Для того чтобы удовлетворить условию **III**, нужно, чтобы внеинтегральные члены взаимно сокращали друг друга. Кроме того, при интегрировании по частям функция $\psi(h,t)$ дифференцируется некоторое число раз и для того, чтобы последующие интегралы существовали, нужно, чтобы функции $R_\pm$ и их производные убывали на бесконечности быстрее, чем это обеспечивается условием **I**. Здесь используется следующий результат, полученный в работе [10]: пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(0,-c^2)$ $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$, $s \leqslant m-1$

$$\frac{\partial^s R_\pm(\lambda)}{\partial {k_\pm}^s} = \frac{Q_{\pm,s}(k_\pm)}{{k_\pm}^{n+1}}, \qquad Q_+(\cdot) \in \text{Ł}_2(\mathbb{R}), \qquad Q_-(\cdot) \in \text{Ł}_2(\mathbb{R} \setminus (\Omega_{\varepsilon,-} \cup \Omega_{\varepsilon,+}),$$

где $\Omega_{\varepsilon,\pm} = \left(\pm\sqrt{c^2-\varepsilon^2}, \pm\sqrt{c^2+\varepsilon^2}\right)$. Заметим, что области $\Omega_{\varepsilon,\pm}$ возникли из-за отсутствия производных по параметру k_- у функции R_- в точках $k_- = \pm c$. Поэтому при интегрировании по частям формулы (11) мы используем следующие обрезающие функции: $B_\varepsilon^\pm(k_-) = B\left(\pm\sqrt{k_-^2-c^2}, \varepsilon\right)$, где

$$B(\xi,\varepsilon) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2}\left(1-\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)^{2m}\right)^{m+3} & \text{при} \quad |\xi| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad |\xi| > \varepsilon, \end{cases} \tag{13}$$

и представляем $F_{c,-}(x,t)$ в виде

$$F_{c,-}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{\Omega_{\varepsilon,+}\cup\Omega_{\varepsilon,-}\}} \Phi(k_-)e^{-ik_-x}dk_- + I_+(x,t,\varepsilon) + I_-(x,t,\varepsilon), \tag{14}$$

где

$$I_\pm(x,t,\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\pm}} \Phi(k_-)e^{-ik_-x}(1-B_\varepsilon^\pm(k_-))\,dk_- + \int\limits_{\Omega_{\varepsilon,\pm}} \Phi(k_-)e^{-ik_-x}B_\varepsilon^\pm(k_-)\,dk_- \tag{15}$$

и $\Phi(k_-) := R_-(\lambda(k_-))\psi(ik_-,t)$. Первые слагаемые в формулах (14) и (15) интегрируются обычным образом, причем их внеинтегральные члены взаимно сокращают друг друга. Что касается последнего слагаемого в формуле (15), то для его оценки используется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $q \in \mathcal{L}_m^n(0,-c^2)$, $m \geqslant 3$, $n \geqslant 1$. Тогда в области $\Omega_{\varepsilon,\pm}$ функция $\Phi(k_-)$ допускает следующее разложение по параметру $\xi = \pm\sqrt{k_-^2+c^2}$:*

$$\Phi(k_-) = a_0^\pm + a_1^\pm\xi + \cdots + \xi^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}g_\pm(\xi),$$

где $g_\pm(\xi) \in C^{\left[\frac{m+1}{2}-1\right]}(\Omega_{\varepsilon,\pm})$.

Тем самым функция $\xi^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}g_\pm(\xi)$ может быть $[m+1/2]-1$ раз продифференцирована по переменной k_-, при этом внеинтегральные члены исчезают за счет функции $B_\varepsilon^\pm(k_-)$. Оставшаяся степенная функция может быть выражена через функции параболического цилиндра, причем оценки имеют экспоненциальный характер убывания при $x \to -\infty$.

Нам остается оценить функцию $F_{c,+}(x,t)$. Представим второе слагаемое в формуле (10) в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-c^2}^{0}|T_-(\lambda)|^2\psi\left(\mathrm{i}\sqrt{\lambda}\right)e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda+c^2}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{c}^{0}P(h)\psi(h)\mathrm{e}^{-hx}dh, \tag{16}$$

где $\sqrt{\lambda}=k_+=\mathrm{i}h$ и

$$P(h)=\mathrm{i}h\mathsf{W}(\phi_-,\overline{\phi_-})\big/(\mathsf{W}(\phi_-,\phi_+)\mathsf{W}(\overline{\phi_-},\phi_+)), \tag{17}$$

где $\mathsf{W}(f,g)$ — вронскиан двух функций. Очевидно, что при интегрировании по частям правой части (16) внеинтегральные члены, соответствующие точке c, будут экспоненциально малы при $x\to+\infty$. Поэтому при интегрировании по частям обоих слагаемых в (10) должны взаимно сокращаться внеинтегральные члены, соответствующие точкам 0. Элементарный подсчет показывает, что это достигается, если выполнена следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $q\in\mathcal{L}_m^n(0,-c^2)$, $m\geqslant3$, $n\geqslant0$. Тогда имеет место тождество*

$$\lim_{k_+\to+0}\mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}^{s+1}\frac{\partial^s}{\partial k_+^s}R_+(\lambda)\right\}=\lim_{h\to+0}\frac{\partial^s}{\partial h^s}P(h),\qquad s=0,1,\ldots,m-1. \tag{18}$$

Эта лемма доказывается с помощью тождества Плюккера.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта “Мережа математичних дослiджень 2013–2015”.

1. *Marchenko V. A.* The inverse scattering problem and its applications to NLPDE // Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / Ed. by R. Pike, P. Sabatier. – San Diego: Academic Press, 2002. – P. 1695–1706.
2. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сб. – 1983. – **120(162)**, № 3. – С. 396–425.
3. *Kappeler T.* Solutions of the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data // J. Different. Equat. – 1986. – **63**, No 3. – P. 306–331.
4. *Egorova I., Teschl G.* On the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation with steplike finite-gap initial data II. Perturbations with finite moments // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 71–101.
5. *Буслаев В. С., Фомин В. Н.* К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера на всей оси // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1962. – **17**, № 1. – С. 56–64.
6. *Cohen A., Kappeler T.* Scattering and inverse scattering for steplike potentials in the Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. – 1985. – **34**, No 1. – P. 127–180.
7. *Marchenko V. A.* Sturm–Liouville operators and applications. – Basel: Birkhäuser, 1986. – 395 p.
8. *Egorova I., Gladka Z., Lange T.-L., Teschl G.* On the inverse scattering transform method for the Korteweg–de Vries equation with steplike initial data / University of Vienna. – Prepr. – Wien, 2014.
9. *Хруслов Е. Я.* Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Матем. сб. – 1976. – **99**, № 2. – С. 261–281.
10. *Гладкая З. Н.* О коэффициенте отражения оператора Шредингера с гладким потенциалом // Доп. НАН України. – 2014. – № 9. – Р. 7–9.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 22.09.2014

З. М. Гладка

Про розв'язок рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинки

Встановлено розв'язність задачі Коші для рівняння Кортевега–де Фріза з початковими даними типу сходинки, а також швидкість спадання розв'язків залежно від гладкості потенціалу.

Z. M. Gladka

About solving the Korteweg–de Vries equation with step-like initial data

The solvability of a Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation is established, and the rate of decrease of solutions as a function of the smoothness of the potential is found.