https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.043
УДК 539.375

О.Л. Кіпніс, https://orcid.org/0000-0001-6747-8584

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Плоска задача про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж міжфазної зони гладкого проковзування

Представлено академіком НАН України В.М.Назаренком

Досліджено лінеаризовану задачу плоскої деформації про стискання кусково-однорідного напівобмеженого тіла з вільною від навантажень граничною поверхнею вздовж зони гладкого проковзування, яка розташована на прямолінійній межі поділу двох різних жорстко з'єднаних між собою пружних середовищ. З використанням представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні гармонічні функції у випадку нерівних коренів характеристичних рівнянь для пружних потенціалів складових компонент тіла вихідну граничну задачу зведено до задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненого додатковою умовою. Із застосуванням методу Бубнова — Гальоркіна до дослідження останньої вивчено характер залежності критичних значень параметра навантаження задачі від геометричного та фізико-механічних параметрів тіла у випадку пружного потенціалу Трелоара.

Ключові слова: *кусково-однорідне напівобмежене тіло, зона проковзування, межа поділу середовищ, критичні навантаження, потенціал Трелоара.*

Вступ. Технологічні процеси виготовлення елементів конструкцій з покриттям (антикорозійним, зносостійким, теплоізоляційним тощо) та їх експлуатації не виключають виникнення в них тріщин, розшарувань та інших дефектів, зокрема, зон проковзування між основою та покриттям, які можуть істотно впливати на міцність і довговічність таких тіл. Якщо припустити, що на етапі виготовлення два матеріали, які є складовими компонентами елементу конструкції, знаходяться в умовах ідеального контакту (жорстко з'єднані між собою), то в процесі експлуатації зв'язок між ними може послаблюва-

Цитування: Кіпніс О.Л. Плоска задача про стискання напівобмеженого кусково-однорідного тіла вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 6. С. 43—52. https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.06.043

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

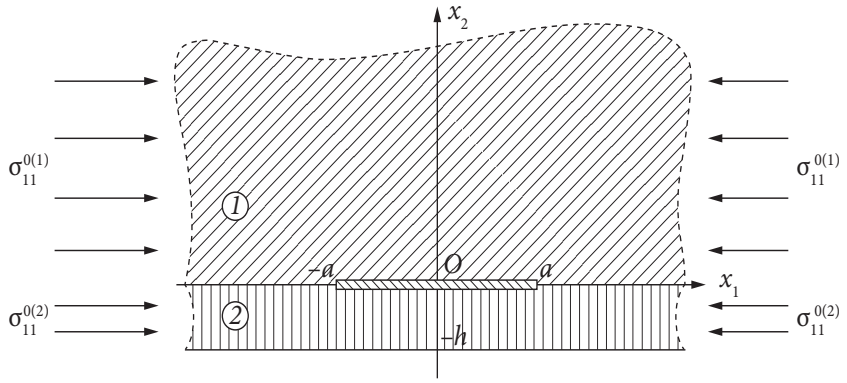

Рис. 1. Кусково-однорідна півплощина з міжфазною зоною гладкого проковзування при стиску

тись внаслідок накопичення мікродефектів на межі поділу середовищ, що в результаті може призвести до появи тріщини. При цьому найслабший тип зв'язку між компонентами кусково-однорідного тіла в механіці композитних матеріалів моделюється умовами гладкого проковзування [1].

Задачі про *стискання* кусково-однорідних тіл вздовж міжфазного дефекту типу зони проковзування (зони, вздовж якої допускається розрив лише дотичного переміщення), які в математичному плані еквівалентні задачам про міжфазні зсувні тріщини з повністю контактуючими берегами, досі не розглядалися. Подібні задачі відносять до некласичних проблем механіки руйнування [2—4] через незастосовність класичних критеріїв руйнування [5, 6] за указаної геометрії навантаження (див. детальніше, наприклад, [7—9]).

Ефективним підходом до дослідження таких проблем руйнування є застосування апарату тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [3] та розроблених в її рамках критеріїв руйнування [10], відповідно до яких початок (старт) процесу руйнування пов'язується з втратою стійкості частини матеріалу в локальній області в околі тріщини [11—14].

Нижче в рамках моделі скінченних (великих) докритичних деформацій тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджується плоска задача про стискання напівобмеженого конструкційного тіла вздовж зони гладкого проковзування обмеженої довжини, розташованої на прямолінійній межі поділу двох різних, жорстко з'єднаних між собою середовищ: напівобмеженого однорідного тіла (основа) та однорідного шару покриття. Відповідну крайову задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій [4, 11, 13], із застосуванням інтегральних перетворень Фур'є зведено до задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду і деякої додаткової умови, яке досліджується чисельно методом Бубнова — Гальоркіна [15]. Зазначене інтегральне рівняння одержане в загальному випадку, коли обидва матеріали тіла є стисливими або нестисливими високоеластичними матеріалами, пружні потенціали яких мають нерівні корені характеристичних рівнянь [3]. Числові результати з дослідження задачі на власні значення приводяться для потенціалу Трелоара для нестисливих тіл [16].

Мета роботи — визначення критичних значень параметра навантаження задачі та дослідження характеру їх залежності від геометричного та фізико-механічних параметрів задачі.

Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло з вільною граничною поверхнею $x_2 = -h$, яке утворене жорстким з'єднанням основи ($x_2 \geqslant 0$, матеріал "1") та шаром тонкого покриття ($-h \leqslant x_2 \leqslant 0$, матеріал "2"). Нехай прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить дефект довжиною $2a$ у вигляді зони гладкого проковзування (рис. 1).

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі Ox_1 рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma_{11}^{0(3)} = \text{const},\ i = 1, 2;\ \sigma_{11}^{0(1)} \neq \sigma_{11}^{0(2)}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові видовження вздовж осі Ox_1 для матеріалів півплощини та смуги:

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const},\ \lambda_1 < 1,$$

де λ_1^1, λ_1^2 — коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$, відповідно.

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей "1" і "2" є статично визначеним, однорідним та записується виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1,\ i = 1, 2. \tag{1}$$

Тут і далі верхнім індексом "1" або "2" позначені величини для матеріалів півплощини "1" або смуги "2" відповідно; верхнім індексом "0" позначаються величини, що відносяться до початкового (докритичного, незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначаються додатковим індексом.

Граничні умови сформульованої задачі записуються так:

$$\begin{aligned}
&t_{22}^{(2)} = 0,\ u_1^{(2)} = 0\ \ (x_2 = -h,\ 0 \leqslant |x_1| < \infty);\\
&t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)},\ t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)},\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)}\ \ (x_2 = 0,\ 0 \leqslant |x_1| < \infty);\\
&t_{21}^{(2)} = 0\ \ (x_2 = 0,\ |x_1| \leqslant a);\\
&u_1^{(1)} = u_1^{(2)}\ \ (x_2 = 0,\ |x_1| > a),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $t_{kl}^{(i)}$, $i, k, l = 1, 2$ — збурення компонент несиметричного тензору напружень Піоли — Кірхгофа $\tilde{t}$; $\vec{e}$ — вектор збурення переміщень.

Умови однорідності докритичного НДС (1) є необхідними умовами застосування загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через потенціальні

гармонічні функції. Досліджуючи випадок, коли корені характеристичних рівнянь для пружних потенціалів складових матеріалів тіла є нерівними [3] з використанням указаних представлень по аналогії до робіт [11, 13] отримуємо співвідношення для граничних умов (2) в термінах потенціальних гармонічних функцій:

$$k_1^2\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial x_1\partial z_1^{(2)}}+k_2^2\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial x_1\partial z_2^{(2)}}=0,$$

$$k_4^2\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2}+k_5^2\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2}=0\ \ (z_j^{(2)}=-h_j,\ 0\leqslant|x_1|<\infty);$$

$$k_1^1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x_1\partial z_1^{(1)}}+k_2^1\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x_1\partial z_2^{(1)}}=k_1^2\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial x_1\partial z_1^{(2)}}+k_2^2\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial x_1\partial z_2^{(2)}},$$

$$k_4^1\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2}+k_5^1\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2}=k_4^2\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2}+k_5^2\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2},\qquad(3)$$

$$p_1^1\frac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial z_1^{(1)}}+p_2^1\frac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial z_2^{(1)}}=p_1^2\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}}+p_2^2\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}}\ \ (z_j^{(i)}=0,\ 0\leqslant|x_1|<\infty);$$

$$k_1^2\frac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial z_1^{(2)}}+k_2^2\frac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}}=\text{const}\ \ (z_j^{(2)}=0,\ |x_1|\leqslant a);$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2}+\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2}=\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2}+\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2}\ \ (z_j^{(i)}=0,\ |x_1|>a)$$

та додаткову умову

$$\int_0^a\left(\frac{\partial^2\varphi_1^{(1)}}{(\partial z_1^{(1)})^2}+\frac{\partial^2\varphi_2^{(1)}}{(\partial z_2^{(1)})^2}\right)\Bigg|_{z_j^{(1)}=0}\mathrm{d}x_1=\int_0^a\left(\frac{\partial^2\varphi_1^{(2)}}{(\partial z_1^{(2)})^2}+\frac{\partial^2\varphi_2^{(2)}}{(\partial z_2^{(2)})^2}\right)\Bigg|_{z_j^{(2)}=0}\mathrm{d}x_1.\qquad(4)$$

В (3), (4) функції $\varphi_j^{(i)}$, $i,j=1,2$ є гармонічними функціями своїх змінних; $z_j^{(i)}=\dfrac{x_2}{\sqrt{n_j^{(i)}}}$, $h_j=\dfrac{h}{\sqrt{n_j^{(2)}}}$; $n_{1,2}^{(i)}$, $n_1^{(i)}\neq n_2^{(i)}$ — корені характеристичних рівнянь, про які йшлося вище; $k_{1,2,4,5}^i$, $p_{1,2}^i$, $i=1,2$ — відомі коефіцієнти [2, 3], які визначають обрану модель матеріалу та залежать від λ_1.

Розв'язальне інтегральне рівняння задачі. З урахуванням симетрії конфігурації відносно осі Ox_2, по аналогії до задачі для міжфазної тріщини [13, 14], представимо невідомі

потенціальні функції у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою x_1:

$$\varphi_1^{(1)}(x_1, z_1^{(1)}) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1^{(1)}} \frac{\cos\lambda x_1 \mathrm{d}\lambda}{\lambda};$$

$$\varphi_2^{(1)}(x_1, z_2^{(1)}) = \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_2^{(1)}} \frac{\cos\lambda x_1 \mathrm{d}\lambda}{\lambda};$$

$$\varphi_1^{(2)}(x_1, z_1^{(2)}) = \int_0^\infty [C_1(\lambda)\cosh\lambda(h_1 + z_1^{(2)}) + C_2(\lambda)\sinh\lambda(h_1 + z_1^{(2)})] \frac{\cos\lambda x_1 \mathrm{d}\lambda}{\lambda \sinh\lambda h_1}; \tag{5}$$

$$\varphi_2^{(2)}(x_1, z_2^{(2)}) = \int_0^\infty [D_1(\lambda)\cosh\lambda(h_2 + z_2^{(2)}) + D_2(\lambda)\sinh\lambda(h_2 + z_2^{(2)})] \frac{\cos\lambda x_1 \mathrm{d}\lambda}{\lambda \sinh\lambda h_2}.$$

Використавши наскрізні граничні умови (перші п'ять умов в (3)), з урахуванням представлень (5) визначаємо решту невідомих функцій через $C_1(\lambda)$:

$$D_1 = -\frac{k_4^2}{k_5^2}\gamma C_1,\ D_2 = -\frac{k_1^2}{k_2^2}\gamma C_2,$$

$$A = \Delta^{-1}[k_2^1 k_4^2 l - k_5^1 m]C_1 + \Delta^{-1}[k_5^1 k_1^2 l - k_2^1 n]C_2,$$

$$B = \Delta^{-1}[-k_1^1 k_4^2 l + k_4^1 m]C_1 + \Delta^{-1}[-k_4^1 k_1^2 l + k_1^1 n]C_2,$$

$$C_1(\lambda) = q(\lambda)\tilde{N}_2(\lambda),\ q(\lambda) = q_2(\lambda)/q_1(\lambda), \tag{6}$$

$$q_1(\lambda) = k_4^2 \frac{-p_1^1 k_2^1 + p_2^1 k_1^1}{\Delta} l + \frac{-p_2^1 k_4^1 + p_1^1 k_5^1}{\Delta} m - p_1^2 + p_2^2 \gamma \frac{k_4^2}{k_5^2},$$

$$q_2(\lambda) = k_1^2 \frac{p_1^1 k_5^1 - p_2^1 k_4^1}{\Delta} l + \frac{p_2^1 k_1^1 - p_1^1 k_2^1}{\Delta} m + p_1^2 \coth\mu_1 - p_2^2 \gamma \frac{k_1^2}{k_2^2}\coth\mu_2,$$

$$l = \gamma\coth\mu_2 - \coth\mu_1,\ m = k_1^2 - \gamma\frac{k_2^2 k_4^2}{k_5^2},\ n = k_4^2 - \gamma\frac{k_1^2 k_5^2}{k_2^2}.$$

Останні дві умови (3) з використанням підходу [17] після перетворень приводять до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) g(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \mathrm{const}, \tag{7}$$

$$\beta = h/a,\ 0 \leqslant \xi < 1,\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1$, $\eta \equiv a^{-1}t$ μ_1, μ_2 відносно невідомої безрозмірної функції $g(\xi) \equiv a\psi(a\xi)$ і невідомої константи, яка пов'язана з додатковою умовою (4):

$$\int_0^1 g(\eta)(1-\eta^2)\,d\eta = 0. \tag{8}$$

Ядро $K(\xi, \eta)$ інтегрального рівняння (7) має такий вигляд:

$$K(\xi,\eta) = \int_0^\infty H(\lambda)\frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^3}\,d\lambda,$$
$$H(x) = \frac{\tilde{m}\tilde{q}(x) - k_1^2\tilde{l}}{\tilde{q}(x)\tilde{v}(x) + \tilde{w}(x)}, \tag{9}$$

де

$$v(\lambda) = k_4^2\frac{k_2^1 - k_1^1}{\Delta}l + \frac{k_4^1 - k_5^1}{\Delta}m - \coth\mu_1 + \gamma\frac{k_4^2}{k_5^2}\coth\mu_1,$$
$$w(\lambda) = k_1^2\frac{k_5^1 - k_4^1}{\Delta}l + \frac{k_1^1 - k_2^1}{\Delta}m - 1 + \gamma\frac{k_1^2}{k_2^2}.$$

Функції в (9), які позначені «тильдою» згори, збігаються з аналогічними функціями без «тильди», в усіх складових для яких замість μ_1, μ_2 покладено, відповідно, $(n_1^{(2)})^{-1/2}\beta\lambda$ або $(n_2^{(2)})^{-1/2}\beta\lambda$, де $\beta = h/a$.

Таким чином, вихідна задача зводиться до задачі (7), (8) на власні значення відносно параметра укорочення $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1$, $\lambda_1 < 1$ (значення $\lambda_1 = 1$ відповідає недеформованому стану). Параметр λ_1 характеризує докритичний стан та нелінійним чином входить до ядра (9) інтегрального рівняння (7). Іншими словами, розшукується перше значення параметра $\lambda_1 < 1$ (при зменшенні λ_1, починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, що відповідає неперервному збільшенню зовнішнього стискаючого навантаження), при якому інтегральне рівняння Фредгольма першого роду (7) з додатковою умовою (8) має неєдиний розв'язок.

Інтегральне рівняння (7), яке доповнене умовою (8), було отримане у загальній формі для широкого класу комбінацій двох стисливих або нестисливих матеріалів у випадку, коли вони описуються пружними потенціалами, для яких реалізується випадок нерівних коренів характеристичного рівняння, про який йшлося вище.

Критичні параметри навантаження в задачі. Числове дослідження інтегрального рівняння (7) з умовою (8) реалізовано методом Бубнова — Гальоркіна [15] аналогічно до робіт [13, 14]. В якості прикладу розглянемо випадок, коли матеріали «1» і «2» тіла є нестисливими і описуються пружним потенціалом Трелоара [16].

На рис. 2 зображено залежність критичного значення відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ в задачі, що розглядається, від значення відносної (нормованої на половину довжини тріщини) ширини смуги покриття $\beta = h/a$ для деяких різних значень $g = \mu_2/\mu_1$ ($\mu_i = 2c_{10}^i$, де c_{10}^i — пружна стала матеріалу з потенціалом Трелоара) відношення жорсткості матеріалу покриття до жорсткості матеріалу основи.

Як свідчать результати дослідження, наведені на рис. 2, при зменшенні значення геометричного параметра β (що за фіксованого значення ширини покриття відповідає збільшенню довжини міжфазного дефекту) значення критичного відносного укорочення ε_1 задачі, що розглядується, прямують до значень ε_1^s, що відповідають приповерхневій втраті стійкості при стисканні кусково-однорідної півплощини без дефекту вздовж межі поділу двох середовищ, що *проковзують одне відносно одного без тертя* [1, 18] при тому ж значенні параметра $g = \mu_2/\mu_1$:

$$\varepsilon_1 \to \varepsilon_1^s(g) \text{ при } \beta \to 0. \qquad (10)$$

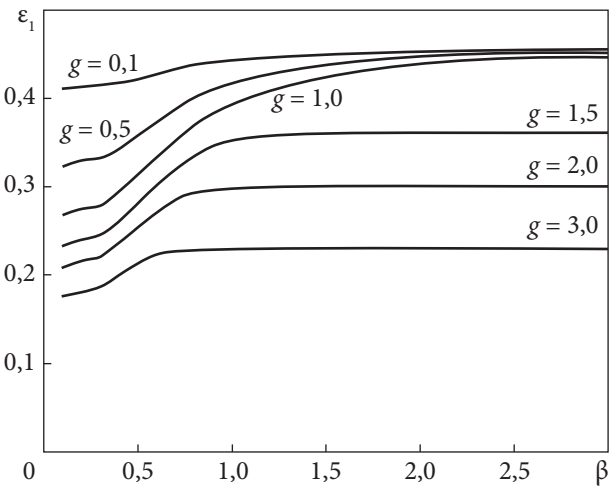

Рис. 2. Залежності $\varepsilon_1(\beta)$ для різних значень $g = \mu_2/\mu_1$ у випадку матеріалів з пружним потенціалом Трелоара

При збільшенні значення геометричного параметра β (що за фіксованого значення ширини покриття відповідає зменшенню довжини міжфазного дефекту) значення критичного відносного укорочення ε_1 в задачі, що розглядується, прямують до цих значень, в аналогічній задачі для цього ж тіла без дефекту (тобто в задачі про стискання кусково-однорідної півплощини без дефекту вздовж межі поділу двох середовищ, що *жорстко з'єднані між собою* [18]):

$$\varepsilon_1 \to \begin{cases} \varepsilon_1^{cr}, & g \leqslant 1 \\ \varepsilon_1^r(g), & g > 1 \end{cases} \quad \text{при} \quad \beta \to \infty. \qquad (11)$$

В (10), (11) ε_1^{cr} — критичне значення відносного укорочення, що відповідає приповерхневій нестійкості *однорідної* півплощини (для випадку потенціалу Трелоара $\varepsilon_1^{cr} = 0,456$) [1, 4], ε_1^r — критичне значення відносного укорочення, що відповідає приповерхневій нестійкості *кусково-однорідної* півплощини [1]. Механізм втрати стійкості кусково-однорідного напівобмеженого тіла без дефекту при стисканні вздовж межі поділу середовищ доволі детально вивчено в [14, 18].

Значення ε_1^s, ε_1^r, які фігурують в (10), (11), визначаються з розв'язання задачі про стискання півплощини без дефекту аналогічно до того, як це зроблено в роботі [18] у випадку рівних коренів характеристичних рівнянь для пружних потенціалів матеріалів тіла.

Близькість результатів дослідження задачі для тіла з дефектом з результатами дослідження задач для аналогічного тіла без дефекту в граничних випадках довжини дефекту не тільки відповідає фізичним міркуванням, а й свідчить про достовірність одержаних результатів, оскільки всі вказані задачі розв'язувались незалежно одна від одної.

Висновки. В рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено задачу плоскої деформації про стискання кусково-однорідної півплощини з жорстко з'єднаними компонентами вздовж міжфазної зони гладкого проковзування. З використанням загальних представлень розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через

гармонічні потенціальні функції у випадку, коли характеристичні рівняння для пружних потенціалів складових компонентів тіла мають нерівні корені, задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненого деякою додатковою умовою.

Для випадку нестисливих матеріалів з пружним потенціалом Трелоара задачу на власні значення для вказаного інтегрального рівняння досліджено чисельно методом Бубнова — Гальоркіна. Визначено критичні значення відносного укорочення задачі та досліджено характер їх залежності від відношення жорсткостей матеріалів кусково-однорідного тіла.

Зокрема, з представлених результатів можна зробити висновок про те, що вплив тертя між берегами дефекту може бути істотним лише для достатньо малих значень параметра $g = \mu_2 / \mu_1$ та достатньо малих значень геометричного параметра $\beta = h / a$.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. Киев: ЛИТЕРА, 2008. (Т. 1. Разрушение в структуре материала. 592 с.)
2. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials under Compression along Cracks. Advanced Structured Materials, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. 490 p.
3. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.-Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1999. 555 p.
4. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. Киев: Наук. думка, 1992. 456 с. (Неклассические проблемы механики разрушения в 4-х т., 5-и кн. Под общ. ред. А.Н. Гузя; Т.4, кн. 1).
5. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1921. **221**. P. 163—198. https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006
6. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *J. Appl. Mech*. 1957. **24**, Iss. 3. P. 361—364. https://doi.org/10.1115/1.4011547
7. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). *Int. Appl. Mech*. 2015. **51**, No. 5. P. 489—560. https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x
8. Guz A.N. Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). *Int. Appl. Mech*. 2014. **50**, No. 1. P. 1—57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
9. Guz A.N. Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50th anniversary of the research (review) III. *Int. Appl. Mech*. 2019. **55**, No. 4. P. 343—415. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4
10. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача. *Докл. АН СССР*. 1981. **259**, № 6. С. 1315—1318.
11. Nazarenko V.M. Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. *Soviet Appl. Mech*. 1986. **22**, No. 10. P. 970—978. https://doi.org/10.1007/BF01273678
12. Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential. *Int. Appl. Mech*. 1994. **30**, No. 10. P. 760—765. https://doi.org/10.1007/BF00847135
13. Богданов В.Л., Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. Стиск напівобмеженого тіла з тонким шаром покриття вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Ч. I. *Прикл. механіка*. 2024. **60**, № 5. С. 3—17.
14. Богданов В.Л., Назаренко В.М., Кіпніс О.Л. Стиск напівобмеженого тіла з тонким шаром покриття вздовж міжфазної приповерхневої тріщини. Ч. II. *Прикл. механіка*. 2024. **60**, № 6. С. 3—13.
15. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Москва: Наука, 1965. 383 с.
16. Treloar L.R.G. Large elastic deformations in rubber-like materials. *IUTAM*. 1955 P. 208—217. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48236-6_20
17. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Ленинград: Наука, 1977. 220 с.
18. Кіпніс О.Л. Приповерхнева стійкість кусково-однорідної півплощини, що стискається вздовж прямолінійної межі поділу двох середовищ за різних умов їх з'єднання. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2024. № 5. С. 62—74. https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062

Надійшло до редакції 24.10.2024

REFERENCES

1. Guz, A. N. (2008). Fundamentals of Fracture Mechanics of Composites under Compression: In 2 volumes. Kyiv: LITERA (Vol. 1. Destruction in the Structure of the Material) (in Russian).
2. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Fracture of Materials under Compression along Cracks. Advanced Structured Materials, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
3. Guz, A. N. (1999). Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.
4. Guz, A. N., Dyshel, M. Sh. & Nazarenko, V. M. (1992). Fracture and Stability of Materials with Cracks. Kyiv: Naukova dumka (Non-Classical Problems of Fracture Mechanics: in 4 vol., 5 books. Guz A.N. (Ed.-in-Chief); vol. 4, book. 1) (in Russian).
5. Griffith, A. A. (1920). The phenomenon of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser.A., 221, pp. 163-198. https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006
6. Irwin, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plat. J. Appl. Mech., 24, pp. 361-364. https://doi.org/10.1115/1.4011547
7. Bogdanov, V. L., Guz, A. N. & Nazarenko, V. M. (2015). Spatial problems of the fracture of materials loaded along cracks (review). Int. Appl. Mech., 51, No. 5, pp. 489–560. https://doi.org/10.1007/s10778-015-0710-x
8. Guz, A. N. (2014). Establishing the foundations of the mechanics of fracture of materials compressed along cracks (review). Int. Appl. Mech., 50, No. 1, pp. 1–57. https://doi.org/10.1007/s10778-014-0609-y
9. Guz, A. N. (2019). Nonclassical problems of fracture/failure mechanics: on the occasion of the 50-th anniversary of the research (review) III. Int. Appl. Mech., 55, No. 4, pp. 343-415. https://doi.org/10.1007/s10778-019-00960-4
10. Guz, A. N. (1981). On one criterion for the fracture of solids under compression along cracks. Dokl. AN SSSR, 259, No. 6, pp. 1315-1318 (in Russian).
11. Nazarenko, V. M. (1986). Two-dimensional problem of the fracture of materials in compression along surface cracks. Soviet Appl. Mech., 22, No. 1, pp. 970-978. https://doi.org/10.1007/BF01273678
12. Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (1994). Study of the compressive failure of a semi-infinite elastic material with a harmonic potential. Int. Appl. Mech., 30, No. 10, pp. 760-765. https://doi.org/10.1007/BF00847135
13. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. & Kipnis, A. L. (2024). Compression of a semi-bounded body with a thin coating layer along the interfacial near-surface crack. Part I. Prykl. Mekh., 60, No. 5, pp 3-17 (in Ukrainian).
14. Bogdanov, V. L., Nazarenko, V. M. & Kipnis, A. L. (2024). Compression of a semi-bounded body with a thin coating layer along the interfacial near-surface crack. Part II. Prykl. Mekh., 60, No. 6, pp 3-13 (in Ukrainian).
15. Mikhlin, S. G. & Smolitsky, Kh. L. (1965). Approximate Methods for Solving Differential and Integral Equations. Moscow: Nauka (in Russian).
16. Treloar, L. R. G. (1955). Large elastic deformations in rubber-like materials. IUTAM. Colloquium, Madrid, pp. 208-217. https://doi.org/10.1007/978-3-642-48236-6_20
17. Uflyand, Ya. S. (1977). Method of dual equations in problems of mathematical physics. Leningrad: Nauka (in Russian).
18. Kipnis, A. L. (2024). Surface stability of a piecewise homogeneous half-plane under compression along a rectilinear interface under different conditions of connection of body elements. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 5, pp. 62-74 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.062

Received 24.10.2024

A.L. Kipnis, https://orcid.org/0000-0001-6747-8584

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: a.l.kipnis@gmail.com

THE PLANAR PROBLEM OF COMPRESSING A SEMI-BOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODY ALONG A SMOOTH SLIDING INTERFACIAL ZONE

The linearized problem of plane deformation in compression of a piecewise-homogeneous semi-confined body with an unloaded boundary surface along a frictionless sliding zone located on the rectilinear interface of two different rigidly interconnected elastic media is studied. Using representations of solutions of linearized equilibrium equations through potential harmonic functions in the case of unequal roots of characteristic equations for elastic potentials of body components, the original boundary value problem is reduced to a problem on eigenvalues of the Fredholm integral equation of the first kind supplemented by an additional condition. With application of the Bubnov-Galerkin method to the study of the latter, the nature of the dependence on the critical values of the load parameter in the problem on geometrical and physical-mechanical parameters of the body in the case of the Treloar elastic potential is studied.

Keywords: *piecewise-homogeneous semi-bounded body, sliding zone, compression interface, critical loads, Treloar elastic potential.*